

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. А. М. ГОРЬКОГО

**В. А. Катаев**

**МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ СВОЙСТВ  
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Учебное пособие для студентов,  
обучающихся по направлению 010700 «Физика»,  
специальностям 010701 «Физика»,  
200501 «Метрология и метрологическое обеспечение»

Екатеринбург  
Издательство Уральского университета  
2010

УДК 53.08  
К29

Рекомендовано к изданию  
учебно-методической комиссией физического факультета  
(протокол № 45 от 15 октября 2008 г.)

Научный редактор  
О. А. Иванов, доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры магнетизма и магнитных наноматериалов  
Уральского государственного университета им. А. М. Горького

Рецензенты:  
лаборатория метрологии электромагнетизма ФГУП  
«Уральский научно-исследовательский институт метрологии»  
(заведующий отделом метрологии электрических и магнитных измерений  
Ю. И. Дидик); Ю. Н. Стародубцев, кандидат физико-математических наук  
(НПП «Гаммамет», Екатеринбург)

**Катаев В. А.**  
К29      **Методы измерений электрических и магнитных свойств функциональных материалов : учеб. пособие / В. А. Катаев. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2010. — 264 с.; илл.**

ISBN 978-5-7996-0530-8

Учебное пособие содержит сведения о теоретических основах измерительной техники, принципах построения и работы измерительных преобразователей, методах проведения измерений электрических и магнитных величин, а также о погрешностях и обработке результатов измерений.

Предназначено для студентов физического факультета, специализирующихся по физике магнитных явлений и физической метрологии, а также аспирантов и тех, кто занимается исследованием функциональных свойств материалов.

ISBN 978-5-7996-0530-8

© ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А. М. Горького», 2010  
© Катаев В. А., 2010

## Предисловие

Проведение измерений является одним из основных средств получения объективных знаний о мире, а накопленный экспериментальный материал — это база для обобщений и установления закономерностей его существования и развития. Вместе с тем проведение измерений имеет безусловное практическое значение, во многом на результатах измерений базируется и техническое развитие, и взаимодействие между отдельными субъектами хозяйственной деятельности. Среди всех измерений особое место занимают электрические измерения в силу универсальности электрических сигналов и имеющихся возможностей для их обработки и хранения, часто при измерении магнитных и неэлектрических величин выходным сигналом преобразователя является именно электрический сигнал.

Наряду с традиционными методами и средствами проведения измерений развитие науки и техники вызывает появление новых принципов измерений (например, магнитооптика или явление сверхпроводимости), новых методов измерений (дискретизация сигнала и цифровые приборы) и новых областей их применения (разведка полезных ископаемых, космические исследования, медицина). Кроме того, в последние десятилетия бурно развивается автоматизация и компьютеризация измерений, создание информационно-измерительных систем. Существенное значение при проведении измерений имеет также их метрологическое обеспечение. Результат любого измерения не является абсолютным и находится в некотором интервале значений, установление этого интервала не менее важно, чем само измерение, а в особо ответственных случаях жизненно необходимо. Использование метрологической терминологии в пособии опирается на рекомендации по межгосударственной стандартизации РМГ 29–99.

Охватить все вопросы, так или иначе касающиеся физических измерений, а также все перспективные приборы и методы измерений не представляется возможным, поэтому данное пособие преследовало выполнение следующих главных задач:

— дать основные понятия измерительной техники и охарактеризовать важнейшие свойства средств измерений;

— продемонстрировать физические принципы, лежащие в основе различных измерительных преобразователей и методов, наиболее широко распространенных при проведении измерений электрических и магнитных свойств функциональных материалов;

— представить сведения, касающиеся метрологического обеспечения процесса измерений и представления результатов измерений.



## Глава 1

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОЦЕССА ИЗМЕРЕНИЙ

### 1.1. Виды и методы измерений

*Измерение* — это нахождение значения физической величины опытным путем с использованием специальных технических средств.

Таким образом, целью измерения является получение количественной информации об измеряемой величине, а результатом — значение физической величины. Качество измерений определяется погрешностью (неопределенностью) результата измерения. Чем ниже погрешность, тем выше качество измерения, а результат измерения содержит больше достоверных цифр. Проведение измерения — это всегда совокупность некоторого числа экспериментальных операций, для проведения которых требуется определенное оборудование, построенное на конкретных физических принципах. Таким образом, для проведения измерений необходимы:

- средства измерения;
- метод или способ измерения.

Например, измерение температуры возможно с помощью термопары — милливольтметра или путем измерения изменения высоты столба жидкости термометром.

Наконец, следует отметить, что при измерении неизбежно возникает взаимодействие средства измерения (СИ) и объекта измерения, учет воздействия СИ на объект позволяет избежать получения ложной информации.

По способу получения значения измеряемой величины все измерения делят на четыре вида: прямые, косвенные, совокупные и совместные.

*Прямым* называют измерение, при котором искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных

с использованием прибора, проградуированного в единицах измеряемой величины. Например, измерение тока — амперметром, сопротивления — омметром, мощности — ваттметром, магнитной индукции — тесламетром.

*Косвенным* называют измерение, при котором искомое значение величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, полученными посредством прямых измерений. Например, мощность можно определить путем прямых измерений силы тока —  $I$ , напряжения —  $U$  и фазового сдвига —  $\varphi$  по формуле  $P = IU \cos \varphi$ . Или сопротивление находят из уравнения

$$R = \frac{U}{I}.$$

*Совокупными* называют проводимые одновременно измерения нескольких одноименных величин, при этом искомые значения каждой из величин находят решением системы уравнений, получаемых по результатам прямых измерений различных сочетаний этих величин. Например, измерение сопротивлений резисторов, соединенных треугольником, — путем измерения сопротивления между различными вершинами треугольника.

*Совместными* называют проводимые одновременно измерения двух или нескольких неоднородных величин для нахождения зависимости между ними. Например, определяют зависимость сопротивления резистора от температуры  $R_t = R_0 (1 + At + Bt^2)$ , измеряя сопротивление резистора при трех различных температурах, составляют систему из трех уравнений, из которых находят параметры  $R_0$ ,  $A$ ,  $B$ .

*Методы прямых измерений.* Из определений видов измерений следует, что основными являются прямые измерения, результаты которых используют при косвенных, совокупных и совместных измерениях. Прямые измерения могут быть реализованы различными методами, которые разделяют на две группы:

- 1) методы непосредственной оценки;
- 2) методы сравнения с мерой.

*Методы непосредственной оценки* — это методы, при которых значение величины определяют непосредственно по отсчетному устройству измерительного прибора прямого действия.

Например, метод измерения силы тока с помощью амперметра, напряжения — с помощью вольтметра и т. д.

Достоинство этих методов — простота реализации; недостаток — относительно невысокая точность.

*Методы сравнения с мерой* — это методы, основанные на сравнении измеряемой величины с величиной, воспроизводимой мерой.

В зависимости от способа сравнения различают следующие методы:

- дифференциальный;
- нулевой;
- замещения.

При *дифференциальном методе* на измерительный прибор воздействует разность измеряемой величины и известной величины, воспроизводимой мерой. Например, при измерении ЭДС нормального элемента (НЭ) встречно с ним включают образцовый НЭ, определяя разность измерительным прибором. Погрешность дифференциального метода определяется как погрешностью образцового НЭ, так и погрешностью измерительного прибора, при этом погрешность прибора будет тем меньше, чем меньше разность между измеряемой ЭДС и ЭДС образцового НЭ.

*Нулевой метод* является предельным случаем дифференциального метода, при этом соответствующая погрешность, обусловленная измерительным прибором, устраняется и остается только погрешность меры. Например, нулевой метод используется при измерении напряжений и сопротивлений с помощью потенциометров и мостов, работающих в режиме уравнивания.

*Метод замещения* является еще более точным, в этом методе измеряемую величину замещают известной величиной, воспроизводимой мерой (измерения производят поочередно на одном и том же оборудовании, по одной и той же схеме).

## 1.2. Физические величины и единицы измерения

*Физическими величинами* называют измеряемые характеристики физических объектов.

Мы говорим, что физическая величина  $G$  измерена, если известно, сколько раз в  $G$  содержится некоторая единица. Это «сколько раз» и есть числовое значение —  $\{G\}$  величины  $G$ . Если единицу величины  $G$  обозначить как  $[G]$ , то числовое значение выражается как

$$\{G\} = \frac{G}{[G]},$$

откуда

$$G = \{G\}[G],$$

т. е. каждая физическая величина представляет собой произведение числового значения на единицу измерения.

Только одного числового значения (без единицы измерения) недостаточно для характеристики физической величины. Так, если сила электрического тока  $I$  в проводнике оказывается в 10 раз больше, чем единица — 1 А, значит, сила тока  $I = 10$  А.

Приводящие к неудобству слишком большие или слишком малые порядки численных значений выражаются с помощью введения кратных и дольных единиц, образуемых через добавление приставки, означающей количество «крат» или «долю» единицы величины:

Приставка	Обозначение (ru)	Обозначение (lat)	Коэффициент
Пета	П	P	$10^{15}$
Тера	Т	T	$10^{12}$
Гига	Г	G	$10^9$
Мега	М	M	$10^6$
...	...	...	...
микро	мк	$\mu$	$10^{-6}$
нано	н	n	$10^{-9}$
пико	п	p	$10^{-12}$
фемто	ф	f	$10^{-15}$

Для ограничения множества возможных величин и единиц вводят так называемые базисные, или основные, величины, тогда остальные необходимые величины находят на основе базисных как производные. Например,

$$\text{скорость} = \frac{\text{путь}}{\text{время}}.$$

Каждая основная величина объединяет целый род однородных величин. Например, длина окружности и высота башни принадлежат к одному роду, именуемому длиной. Однородные величины можно сравнивать между собой, вычитать и складывать.

Для однородных величин вводят понятие *размерности* и обозначают его знаком  $\dim$ . Например, все величины, относящиеся к роду длины, назовем их  $G$ , имеют размерность длины —  $L$ :

$$\dim G = L \text{ (длина)}.$$

К числу основных величин относятся: длина ( $L$ ), время ( $T$ ), масса ( $M$ ), температура ( $\Theta$ ,  $T$ ), сила тока ( $I$ ), количество вещества ( $N$ ) и сила света ( $J$ ,  $I$ ) — всего семь (в скобках указано обозначение их размерности).

Размерность производной величины устанавливает ее связь с основными величинами. Например,

$$\dim v = \text{длина} \cdot \text{время}^{-1} = L \cdot T^{-1}.$$

Необходимо строго различать понятия *размерность* и *единица измерения* и не применять одно вместо другого. Бывает и так, что размерности величин разного рода совпадают. Например, размерность работы и момента силы совпадают — это сила, умноженная на длину. Проверять размерность, удобно контролировать правильность произведенных математических выкладок.

Для осуществления измерений физических величин необходимо установить соответствующие *единицы измерения*, которые объединяются в некоторую систему. В 1960 г. на XI Генеральной конференции по мерам и весам в международном масштабе была установлена Международная система единиц (SI). Международная система единиц включает соответственно семи основным величинам семь основных единиц SI: метр (м), килограмм (кг), секунда (с), Ампер (А), Кельвин (К), моль (моль), кандела (кд). Все остальные единицы SI являются производными от основных и представляют собой произведения степеней основных единиц,

не содержащие численных коэффициентов. Например, единица SI магнитной индукции

$$[B] = \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2} = \text{кг} \cdot \text{А} \cdot \text{с}^{-2} = \text{Тл}.$$

Применяемые единицы физических величин устанавливает ГОСТ 8.417–2002. В некоторых случаях, например при технических измерениях, допускается использование внесистемных единиц, таких как кВт · ч, А · ч, °С.

В области электромагнетизма, особенно в теоретических работах, наряду с системой SI по-прежнему применяется система CGS.

### 1.3. О погрешностях измерения

#### 1.3.1. Основные понятия

Любое измерение, даже при самом тщательном выполнении, не дает абсолютно точного, т. е. истинного, значения измеряемой величины.

*Погрешность* — это отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины.

По форме погрешности делят на абсолютную и относительную.

*Абсолютная погрешность* — это разность между измеренным и истинным значениями измеряемой величины:

$$\Delta = A - A_{\text{ист}}. \quad (1.1)$$

На практике вместо  $A_{\text{ист}}$ , определить которое невозможно, используют действительное значение  $A_{\text{д}}$ . Действительное значение  $A_{\text{д}}$  является оценкой истинного значения и подлежит экспериментальному нахождению. Таким образом,

$$\Delta = A - A_{\text{д}}. \quad (1.2)$$

*Относительная погрешность* — это отношение абсолютной погрешности измерения к действительному значению измеряемой величины:

$$\delta = \frac{\Delta}{A_{\text{д}}} 100 \% . \quad (1.3)$$

По источникам погрешности делят на инструментальную, методическую и субъективную.

*Инструментальная погрешность* связана с несовершенством средств измерений, например, неидеальностью характеристики прибора, влиянием температуры на характеристику прибора и т. д.

*Методическая погрешность* появляется вследствие несовершенства метода измерения: несоответствия измеряемой величины ее модели, влияния средства измерения на объект измерения (вольтметр шунтирует часть цепи, в которой производится измерение напряжения, и режим цепи изменяется и т. д.).

*Субъективная погрешность* обусловлена неправильным отсчетом делений или долей делений прибора, неправильной интерполяцией между делениями и т. д. Тогда суммарная погрешность определяется их сложением:

$$\Delta = \Delta_{\text{и}} + \Delta_{\text{м}} + \Delta_{\text{с}}. \quad (1.4)$$

По характеру погрешности делят на систематическую и случайную. Это обусловлено тем, что причины, вызывающие погрешность, могут действовать либо постоянно, либо по-разному, случайно, при отдельных измерениях.

*Систематической* называется составляющая погрешности измерения, которая при повторных измерениях величины остается неизменной или меняется закономерно.

*Случайная погрешность* — это составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины.

Источниками систематической погрешности могут быть инструментальные, методические и субъективные погрешности, в то же время субъективная погрешность может иметь и случайную составляющую. К возникновению случайной погрешности может приводить также неконтролируемое изменение внешних условий: вибраций, электромагнитных полей, температуры и т. д.

Таким образом, *полная погрешность* измерения может быть представлена в виде суммы систематической и случайной погрешностей:

$$\Delta = \Delta_{\text{сист}} + \Delta_{\text{случ}}. \quad (1.5)$$

### 1.3.2. Оценка погрешностей прямых измерений

Для повышения точности измерений производят исключение отдельных составляющих погрешности. Такое исключение возможно следующими путями:

1. Устранением источников погрешности до начала измерения. Например, установлением прибора по уровню, если такое положение является рабочим, обеспечением термостатирования прибора, устранением вибраций и т. д.

2. Исключением погрешности в процессе измерения. Например, измеряют величину в двух направлениях и берут среднее, как это происходит при измерении коэрцитивной силы для устранения влияния поля Земли, или при измерении электросопротивления для устранения влияния термоэДС, возникающих в измерительной цепи.

3. Исключением погрешности по окончании измерения. Например, при измерении магнитного потока индукционным способом следует рассчитать и учесть в результате поток в воздушном зазоре.

Полное исключение систематической погрешности указанными выше путями невозможно. Так, погрешность, обусловленную несовершенством конструкции прибора, неточным нанесением меток шкалы и т. д., не исключить. Поэтому в отношении систематических ошибок единственная рекомендация состоит в том, что источники ошибок должны быть выявлены и уменьшены до такой степени, пока не станут намного меньше требуемой точности.

Оценку неисключенной систематической погрешности производят по классу точности стрелочного измерительного прибора, а для современных приборов с цифровым отсчетом — по формулам, приведенным в паспорте, которые являются результатом исследования прибора. Так, для цифрового микровеберметра Ф5050 соответствующая формула имеет вид

$$\Delta = \pm(0,003\Phi_x + 0,002\Phi_k),$$

где  $\Phi_x$  — измеренное значение магнитного потока, мкВб;  $\Phi_k$  — предел измерения, мкВб.



Случайные погрешности нельзя исключить опытным путем, но их влияние на результат измерения можно оценить, проведя ряд наблюдений одной и той же величины.

Оценка случайной погрешности возможна, когда рассеивание результатов наблюдений обладает статистической устойчивостью. Свойства случайной величины вообще и случайной погрешности в частности принято описывать функцией распределения значений этой величины.

Функция распределения устанавливает связь между возможными значениями случайной величины (для нас случайной погрешности) и вероятностью появления этих значений.

Закон распределения, или функция распределения случайных погрешностей, может носить произвольный характер, однако на практике часто используют нормальный закон распределения случайных погрешностей, графический вид которого представлен на рис. 1.1.

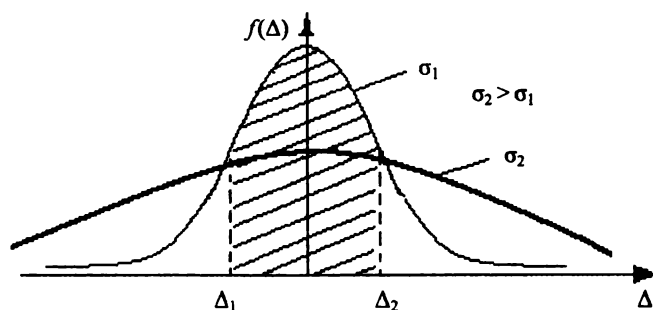


Рис. 1.1. Нормальный закон распределения случайных величин при различных значениях среднеквадратичного отклонения

Здесь  $f(\Delta)$  — функция распределения плотности вероятности случайной погрешности  $\Delta$ . Тогда вероятность того, что случайная погрешность измерения величины  $X$  находится в пределах  $\Delta_1 \div \Delta_2$  (напомним,  $\Delta = x - x_d$ ), равна площади под кривой распределения плотности вероятности в этих пределах:

$$P = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} f(\Delta) dx. \quad (1.6)$$

Площадь под всей кривой, очевидно, равна единице. Нормальный закон распределения описывается уравнением

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1.7)$$

Из рис. 1.1 видно, что плотность вероятности максимальна при  $\Delta = 0$  и асимптотически стремится к нулю при увеличении  $\Delta$ . Параметр  $\sigma$  — среднее квадратическое отклонение (СКО) для данного распределения. Это параметр, который характеризует рассеяние результатов наблюдений. С увеличением  $\sigma$  кривая расширяется, а максимум снижается, т. е. при этом увеличивается доля больших погрешностей, а доля малых снижается. Отсюда следует, что параметр  $\sigma$  характеризует точность измерения.

Применение нормального закона распределения для описания случайной погрешности базируется на двух аксиомах:

1) аксиома случайности гласит, что при большом числе измерений погрешности, равные по величине, но противоположные по знаку, встречаются одинаково часто (отсюда следует симметричность кривой);

2) аксиома распределения утверждает, что малые погрешности встречаются чаще, чем большие; отсюда следует, что для увеличения точности (т. е. снижения случайной погрешности) следует проводить многократные наблюдения измеряемой величины.

Что же считать результатом измерения?

За результат измерения принимают среднее арифметическое значение отдельных наблюдений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1.8)$$

где  $n$  — число наблюдений,  $x_i$  — результат  $i$ -го наблюдения.

Точность результата измерения при одном и том же числе наблюдений будет тем выше, чем меньше рассеяны результаты отдельных наблюдений. Как уже было указано выше, характеристикой рассеяния результатов является СКО. Оценка СКО результата наблюдений (строго говоря, СКО, а не его оценка, может быть определена только при бесконечном количестве наблюдений) находится по формуле

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_d)^2}, \quad (1.9)$$

где  $x_d$  — действительное значение измеряемой величины. На практике  $x_d$  неизвестно, и вместо него используют  $\bar{x}$ . При этом для оценки СКО используют формулу, в которой  $n$  в знаменателе заменено на  $n - 1$  и которую приведем без доказательства:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (1.10)$$

Здесь  $x_i - \bar{x}$  — случайное отклонение результата наблюдения. В качестве аргумента в пользу приведенной формулы рассмотрим случай  $n = 1$ , т. е. когда проведено только одно измерение. При этом  $\bar{x} = x_1$ , и в соответствии с формулой (1.9) получаем абсурдный результат, что единственное отклонение  $\sigma_x = 0$ , в то же время по второй формуле получаем неопределенность вида  $0/0$ , что корректно свидетельствует о нашей полной неосведомленности о погрешности после выполнения только одного измерения.

Поскольку результат измерения  $\bar{x}$ , вычисленный по ограниченному числу наблюдений, содержит случайную погрешность, то его значение может изменяться при выполнении нескольких групп наблюдений. Следовательно, имеется *рассеяние и результата измерений*, которое также может быть оценено по формуле для СКО результата измерений:

$$\tilde{\sigma}(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (1.11)$$

Оценка СКО результатов измерений и СКО результатов наблюдений связаны как

$$\tilde{\sigma}(\bar{x}) = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}. \quad (1.12)$$

Таким образом, СКО результатов измерений с ростом числа наблюдений в группе уменьшается в  $\sqrt{n}$  раз. Например, при 9 наблюдениях СКО результата измерений будет в 3 раза меньше, чем при однократном наблюдении.

Оценка СКО результата измерений  $\tilde{\sigma}(\bar{x})$  косвенно характеризует погрешность результата измерений, однако эта связь неоднозначна и зависит от числа наблюдений и от вида функции распределения случайных погрешностей. Более информативной и наглядной характеристикой погрешности результата измерения является значение *доверительных границ* случайной погрешности —  $\varepsilon$ .

$\varepsilon$  — это границы интервала, накрывающего с заданной вероятностью  $P$  случайную погрешность измерения.

При нормальном законе распределения случайных погрешностей доверительные границы связаны с оценкой СКО результата измерений соотношением

$$\varepsilon = \pm t \tilde{\sigma}(\bar{x}), \quad (1.13)$$

где  $t$  — коэффициент Стьюдента, зависящий от числа наблюдений в группе —  $n$  и выбранной доверительной вероятности  $P$ . Величина  $t$  определяется из таблиц значений коэффициентов Стьюдента. Рекомендуется принимать доверительную вероятность равной 0,95, а в особо ответственных случаях — 0,99.

При проведении измерений встречаются результаты наблюдений, резко отличающиеся по значению от остальных. Вероятно, они получены с грубой погрешностью, существенно превышающей ожидаемую в данных условиях. Для обнаружения наблюдений, содержащих грубые погрешности, используют специальные критерии. Наиболее простым является критерий  $3\tilde{\sigma}$ . В соответствии с этим критерием считают, что если отклонение

$$|x_i - \bar{x}| > 3\tilde{\sigma}, \quad (1.14)$$

то результат  $i$ -го наблюдения содержит грубую погрешность и его следует отбросить.

Методика обработки измерения с многократными наблюдениями по ГОСТ 8.207-76 состоит в следующем:

1. Исключить известные систематические погрешности из результатов наблюдений:

$$x_i = a_i - \Delta_{ci},$$

где  $x_i$  — исправленный результат  $i$ -го наблюдения,  $a_i$  — результат  $i$ -го наблюдения,  $\Delta_{ci}$  — систематическая погрешность  $i$ -го наблю-

дения. Например, при измерении магнитной индукции путем изменения магнитного потока результат наблюдения содержит еще и поток в воздушном зазоре, который и следует исключить из результата наблюдения.

2. Рассчитать среднее арифметическое исправленных результатов группы наблюдений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

В вышеприведенном примере  $\Delta_{ci} = \Delta_c$  — постоянна, поэтому можно определить  $\bar{x}$  неисправленных наблюдений, а затем вычесть  $\Delta_c$ :

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i; \quad \bar{x} = \bar{a} - \Delta_c.$$

3. Оценить рассеивание отдельных наблюдений относительно среднего, вызванное наличием случайных погрешностей, по формуле

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

4. Оценить СКО результата измерений по формуле

$$\tilde{\sigma}(\bar{x}) = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}.$$

5. Найти доверительные границы случайной погрешности результата измерений для нормального распределения по формуле

$$\varepsilon = \pm t \tilde{\sigma}(\bar{x}).$$

6. Вычислить доверительные границы  $\Theta$  неисклученной систематической погрешности результата измерения. При равномерном распределении (рис. 1.2) неисклученных систематических погрешностей эти границы вычисляют по формуле

$$\Theta = \pm k \sqrt{\sum_i^m \Theta_i^2},$$

где  $k$  — коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью; при  $P = 0,95$ ,  $k = 1,1$ ;  $m$  — число суммируемых погрешностей.

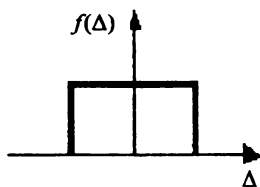


Рис. 1.2. Равномерное распределение случайных величин

Доверительную вероятность для вычисления границ НСП принимают той же, что и при вычислении доверительных границ случайной погрешности результата измерения.

7. Границы погрешности результата измерения находят в зависимости от соотношения СКО случайной погрешности результата измерения  $\tilde{\sigma}(\bar{x})$  и НСП —  $\Theta$ .

При  $\Theta < 0,8\tilde{\sigma}(\bar{x})$  неисключенными систематическими погрешностями пренебрегают и принимают границу погрешности результата  $\Delta$  равной  $\epsilon$ .

При  $\Theta > 0,8\tilde{\sigma}(\bar{x})$  пренебрегают случайной погрешностью и принимают  $\Delta = \Theta$ .

При  $0,8\tilde{\sigma}(\bar{x}) \leq \Theta \leq 8\tilde{\sigma}(\bar{x})$  границы погрешности результата измерения определяют по формуле

$$\Delta = KS_{\Sigma},$$

где  $K = \frac{\epsilon + \Theta}{\sigma(\bar{x}) + \sqrt{\sum_i^m \frac{\Theta_i^2}{3}}}$  определяется случайной и неисключен-

ной систематической погрешностями (эмпирическая формула),

$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_i^m \frac{\Theta_i^2}{3} + \tilde{\sigma}^2(\bar{x})}$  — оценка суммарного СКО результата измерения.

## 8. Результат измерения представляют в форме

$$\bar{x} \pm \Delta, P.$$

Числовое значение результата измерения должно оканчиваться цифрой того же разряда, что и значение погрешности. При отсутствии данных о виде функций распределения, составляющих погрешности результата, и необходимости дальнейшей обработки результатов результаты измерений представляют в форме

$$\bar{x}; \sigma(\bar{x}); n; \Theta; P,$$

где  $n$  — число измерений.

### 1.3.3. Оценка погрешностей косвенных измерений

При косвенных измерениях значение искомой величины  $q$  находят из математической зависимости, связывающей эту величину с величинами, определяемыми прямыми измерениями

$$q = f(x, y, \dots, w). \quad (1.15)$$

Для нахождения погрешности результата косвенного измерения можно использовать следующие правила:

1. Если результат выражается разностью или суммой измеренных значений

$$q = x + \dots + z - (u + \dots + w) \quad (1.16)$$

и абсолютные погрешности  $\Delta x, \dots, \Delta w$  независимы и случайны, то абсолютная погрешность результата определяется по формуле

$$\Delta q = \sqrt{(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta z)^2 + (\Delta u)^2 + \dots + (\Delta w)^2}. \quad (1.17)$$

2. Если результат выражается произведением или частным

$$q = \frac{x \cdot \dots \cdot z}{u \cdot \dots \cdot w} \quad (1.18)$$

и относительные погрешности  $\delta x, \dots$  независимы и случайны, то относительную погрешность определяют по формуле

$$\frac{\Delta q}{q} = \delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + \dots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + \dots + (\delta w)^2}, \quad (1.19)$$

где  $\delta x = \Delta x/x \dots$  относительные погрешности величин, измеряемых прямыми методами.

3. Если результат является некоторой функцией одной величины  $q = f(x)$  (например,  $q = x^2$ ), то абсолютная погрешность результата определяется с помощью производной по формуле

$$\Delta q = \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \Delta x. \quad (1.20)$$

В общем случае абсолютная погрешность функции нескольких величин  $q = f(x, y, \dots, w)$ , погрешности которых независимы и случайны, находится с помощью частных производных по формуле

$$\Delta q = \sqrt{\left( \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \Delta x \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial q}{\partial w} \cdot \Delta w \right)^2}. \quad (1.21)$$

Частные производные можно рассматривать как веса, с которыми абсолютные погрешности величин, измеренных прямыми методами, входят в суммарную абсолютную погрешность.



## Глава 2

# СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

### 2.1. Средства измерений

По определению измерение осуществляется с применением специальных технических средств или средств измерений.

*Средства измерений* — это технические устройства, используемые при измерениях и имеющие нормированные метрологические характеристики.

К средствам измерений относятся эталоны, меры, измерительные преобразователи, измерительные приборы, электроизмерительные установки, измерительные информационные системы (ИИС) и измерительно-вычислительные комплексы (ИВК).

*Эталоны* — средства измерения, обеспечивающие хранение и воспроизведение единиц физической величины с целью передачи ее размеров нижестоящим по поверочной схеме средствам измерения. По своему назначению эталоны подразделяют на несколько видов, из которых отметим следующие:

— *первичный эталон*, обеспечивающий воспроизведение единицы с наивысшей в стране (по сравнению с другими эталонами той же единицы) точностью. Первичный эталон основной единицы должен воспроизводить единицу в соответствии с ее определением;

— *рабочий эталон*, применяемый для передачи размера единицы образцовым средствам измерений высшей точности и в отдельных случаях — наиболее точным рабочим средствам измерений.

*Меры* — образцовые средства измерения, предназначенные для воспроизведения физических величин заданного размера. Применяются меры *однозначные*, воспроизводящие физические величины одного размера (например, конденсатор постоянной емкости), и меры *многозначные*, воспроизводящие ряд одно-

именных величин различного размера (например, магазин сопротивлений).

*Измерительные преобразователи* — средства измерения, предназначенные для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для передачи, дальнейшего преобразования, обработки и хранения, но не поддающейся непосредственному восприятию наблюдателем.

В зависимости от характера измеряемых величин различают следующие виды измерительных преобразователей:

1. *Аналоговые измерительные преобразователи*, у которых входной и выходной сигналы непрерывны во времени и могут иметь различную физическую природу. Например, термопара, применяемая для измерения температуры. На входе термопары действует разность температур ее горячего и холодного спаев —  $\Delta T$ , на выходе ЭДС термопары —  $E_{\text{тп}}$ .

Приведем значения чувствительности некоторых стандартных термопар: хромель-алюмель  $S = 0,04$  мВ/град; хромель-копель —  $0,07$  мВ/град; платина-платинародий —  $0,01$  мВ/град.

2. *Аналого-цифровые (АЦП)*, у которых входной сигнал аналоговый, а выходной представлен кодом.

3. *Цифро-аналоговые (ЦАП)*, у которых входной сигнал представлен кодом, выходной — аналоговой величиной.

4. *Преобразователи код — код (ПКК)*, преобразующие кодовый сигнал одного вида в код другого вида, например, двоичный код в двоично-десятичный.

5. *Масштабирующие*, у которых входной и выходной сигналы аналоговые и одинаковой физической природы. Примером масштабирующего измерительного преобразователя могут служить делители напряжения, усилители тока и напряжения, трансформаторы напряжения и тока.

*Измерительные приборы* — средства измерения, предназначенные для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для непосредственного восприятия наблюдателем. Например, вольтметр, частотомер, фазометр и т. д.

*Измерительная установка* представляет собой совокупность средств измерения и вспомогательных устройств, предназначенных для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для непосредственного восприятия наблюдателем.

Например, измерительная установка для поверки стрелочных измерительных приборов.

*Измерительные информационные системы* — совокупность средств измерения, предназначенных для сбора, хранения, обработки и передачи измерительной информации в системах автоматического управления.

*Измерительно-вычислительные комплексы* — автоматизированные средства измерения, представляющие собой совокупность программно-управляемых измерительных и вычислительных средств, предназначенных для исследования сложных процессов и управления ими.

## 2.2. Классификация измерительных приборов

В процессе измерения любым прибором осуществляется сравнение измеряемой величины с однородной величиной, принятой за единицу. Классификации имеющегося большого разнообразия измерительных приборов можно провести по различным признакам. Приведем здесь одну из них, руководствуясь технической сущностью и практическим применением приборов (рис. 2.1).

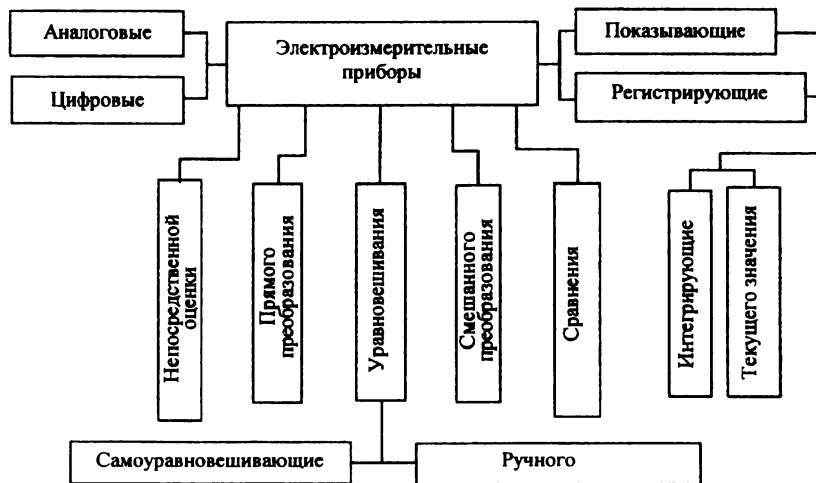


Рис. 2.1. Классификация электроизмерительных приборов

Деление на *аналоговые* и *цифровые* обусловлено видом представления измерительной информации — первые имеют непрерывную шкалу, а вторые — дискретное цифровое показывающее устройство.

Деление на *показывающие* и *регистрирующие* связано с тем, что одни приборы имеют шкалу либо табло, откуда считывается результат измерения, тогда как другие представляют результат в виде диаграммы, графика (например, самописцы). И те и другие приборы могут давать информацию о текущем значении измеряемой величины (приборы текущего значения) либо осуществлять интегрирование входной величины по времени (например, счетчик электроэнергии).

В зависимости от способа сравнения, заложенного в принципе работы приборов, их делят на *приборы сравнения* (в них происходит сравнение мерой) и *приборы непосредственной оценки*, имеющие заранее градуированную в единицах измеряемой величины шкалу. При этом они будут различаться еще и по своей структуре.

По структурному принципу приборы можно разделить на три вида: *прямого преобразования*, *уравновешивания*, *смешанного преобразования*, сочетающего первые два вида. Прибор прямого преобразования характеризуется тем, что преобразования входной величины происходят только в одном направлении. В приборах уравновешивания, которые еще называют компенсационными приборами, имеются две цепи преобразования прямого и обратного. В них о входной величине судят по результату работы цепи обратного преобразования, сигнал с которой с некоторой точностью компенсирует входную величину. Если эта разность оказывается равной нулю, то будет реализован метод сравнения противопоставлением. Процесс уравновешивания или противопоставления может осуществляться вручную или автоматически (самоуравновешивающиеся приборы).

По характеру применения приборы разделяют на стационарные (щитовые), переносные и для подвижных установок (транспортные).

## Глава 3

# ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

В основе любых средств измерений (СИ) лежит измерительный преобразователь или измерительный прибор (ИП), который, в свою очередь, является совокупностью измерительных преобразователей. Поэтому рассматриваемые далее свойства в равной мере относятся как к измерительным преобразователям, так и к измерительным приборам.

Различают статические и динамические свойства преобразователей и приборов.

*Статические свойства* относятся к таким условиям работы ИП, когда измеряемая величина не изменяется в процессе измерения.

*Динамические свойства* характеризуют ИП в условиях изменения измеряемой величины от времени.

### 3.1. Статические характеристики и параметры СИ

#### 3.1.1. Уравнение преобразования

*Уравнением преобразования* называют однозначную функциональную зависимость между выходной величиной (выходным сигналом)  $y$  и входной величиной (входным сигналом)  $x$ , которая может быть выражена аналитически:  $y = f(x)$  или графически.

Уравнение преобразования может быть линейным или нелинейным. Уравнение преобразования задается принципом действия и конструкцией СИ. В большинстве случаев разработчики стремятся реализовать линейное уравнение преобразования.

Например, для распространенного магнитоэлектрического измерительного механизма уравнение преобразования имеет вид

$$\alpha = \frac{Bs\omega}{k} I, \quad (3.1)$$

где  $\alpha$  — угол отклонения подвижной части — выходная величина  $y$ ,  $k$  — коэффициент жесткости подвижной части,  $B$  — индукция в зазоре магнитной системы,  $s$  — площадь подвижной рамки,  $\omega$  — число витков обмотки рамки,  $I$  — сила тока в обмотке рамки — измеряемая входная величина  $x$ .

### 3.1.2. Чувствительность СИ

*Чувствительность СИ* определяет скорость изменения выходной величины при изменении входной:

$$S = \frac{dy}{dx}. \quad (3.2)$$

Например, для линейного уравнения преобразования чувствительность может быть определена по наклону прямой, отображающей уравнение преобразования  $y = f(x)$ :

$$S = \frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{x}. \quad (3.3)$$

В этом случае чувствительность является постоянной величиной (заметим, что для преобразователей эту величину еще называют коэффициентом преобразования). В рассмотренном выше примере с магнитоэлектрическим механизмом  $S_{\omega} = \frac{Bs\omega}{w}$ .

Для нелинейного уравнения преобразования чувствительность является переменной величиной, различной для разных значений входной величины  $x$ .

*Порогом чувствительности СИ* называют изменение входной величины, вызывающее наименьшее изменение выходной величины, которое может быть обнаружено с помощью данного СИ без каких-либо дополнительных устройств. По определению порог чувствительности выражается в единицах входной величины.

Так как любой прибор состоит из измерительных преобразователей, то чувствительность прибора может быть выражена через чувствительности входящих в него преобразователей.

1. Рассмотрим случай прибора *прямого преобразования*, в котором входная величина преобразуется только в одном направлении, структурная схема такого прибора состоит из последовательно соединенных преобразователей и является незамкнутой (рис. 3.1).

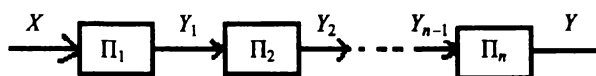


Рис. 3.1. Структурная схема прибора прямого преобразования

Для линейного уравнения преобразования имеем

$$S_{\text{пп}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \times \frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} \times \dots \times \frac{\Delta y}{\Delta y_{n-1}} = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n. \quad (3.4)$$

Таким образом, для прибора прямого преобразования результирующая чувствительность равна произведению чувствительностей всех последовательно соединенных преобразователей.

2. Рассмотрим случай прибора *уравновешивания* (компенсационный прибор) с замкнутой структурной схемой, состоящей из двух цепей прямой, обратной и преобразователя сравнения ПС (рис. 3.2).

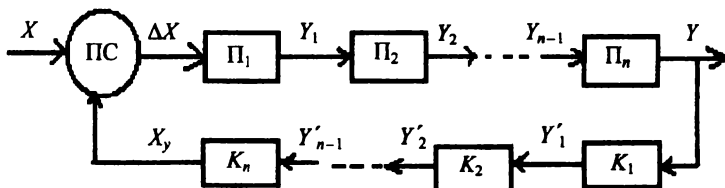


Рис. 3.2. Структурная схема прибора уравновешивания

По-прежнему будем считать уравнение преобразования линейным:

$$S_{\text{уравн}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{x}. \quad (3.5)$$

Для цепи прямого преобразования  $S_{\Pi} = \frac{y}{\Delta x}$ , где  $\Delta x = x - x_y$ .

Для цепи обратного преобразования  $S_K = \frac{x_y}{y}$ .

Выразим чувствительность прибора уравнивания через чувствительности входящих в него цепей преобразования. Для этого учтем, что  $x = \Delta x + x_y$ , подставим сюда  $\Delta x$  и  $x_y$  из выражений для  $S_{\Pi}$  и  $S_K$  соответственно и получим:

$$x = \frac{y}{S_{\Pi}} + S_K y = y \left( \frac{1}{S_{\Pi}} + S_K \right). \quad (3.6)$$

Откуда для чувствительности прибора уравнивания получаем, что она равна некоторой комбинации из чувствительностей обеих цепей:

$$S_{\text{уравн}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{1}{S_{\Pi}} + S_K} = \frac{1}{1 + S_{\Pi} S_K} \cdot S_{\Pi}. \quad (3.7)$$

Для лучшего уяснения полученного выражения введем дополнительную величину, характеризующую работу прибора, а именно: относительное неуравновешивание  $\alpha = \frac{\Delta x}{x}$ . Заметим, что эта величина всегда меньше единицы ( $\alpha < 1$ ) и продолжим преобразования:

$$\begin{aligned} S_{\text{уравн}} &= \frac{1}{1 + S_{\Pi} S_K} \cdot S_{\Pi} = \frac{1}{1 + \frac{y}{\Delta x} \frac{x_y}{y}} \cdot S_{\Pi} = \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta x + x_y} \cdot S_{\Pi} = \frac{\Delta x}{x} \cdot S_{\Pi} = \alpha \cdot S_{\Pi}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Видно, что чувствительность прибора уравнивания составляет долю чувствительности цепи прямого преобразования, равную  $\alpha$ .

3. Рассмотрим случай для прибора с комбинированной структурной схемой, которая схему уравнивания содержит как составляющую часть, а дополнительные входные и выходные



преобразователи — соединенными с ней последовательно. Поэтому выражение для чувствительности такого прибора соответствует выражению для прибора прямого преобразования с тремя преобразователями, один из которых — преобразователь уравнивания:

$$S_{\text{комб}} = S_{\text{вх}} \times S_{\text{уравн}} \times S_{\text{вых}}. \quad (3.9)$$

### 3.1.3. Погрешность СИ, пределы и диапазон измерений

Верхним и нижним пределами измерений прибора называют, соответственно, наибольшее и наименьшее значения величины, которые могут быть измерены с нормируемой погрешностью.

Область значений между верхним и нижним пределами определяет *диапазон измерений*.

Диапазон измерений может состоять из нескольких поддиапазонов, для каждого из которых могут быть нормированы разные погрешности.

В определенных случаях прибор допускает «перегрузку», но при этом погрешность будет превышать погрешность, нормируемую для верхнего предела измерения. С другой стороны, наименьшее измеряемое значение определяется порогом чувствительности прибора, но при таких значениях измеряемой величины погрешность будет равна 100 %.

Область значений между порогом чувствительности и наибольшим значением величины, которая может быть измерена, составляет *полный диапазон*. При этом для значений вне диапазона измерений погрешность не нормирована.

При рассмотрении погрешности следует различать:

- 1) погрешность средства измерения;
- 2) погрешность результата измерения этим средством измерения.

Они связаны, но в общем случае не совпадают.

Погрешность результата измерения, которая, конечно, зависит от погрешности СИ, зависит еще от того, производится единичное измерение или многократные наблюдения, а также от того, каково значение измеряемой величины по отношению к верхнему пределу измерений прибора.

Погрешность средства измерения разделяют на основную и дополнительную погрешности.

*Основная погрешность* — это погрешность, возникающая при нормальных условиях применения СИ. Нормальные условия эксплуатации устанавливаются в отношении так называемых влияющих величин, таких как температура, влажность, магнитные и электрические поля и т. д. Например, применение СИ рекомендуется при относительной влажности до 70 %, температуре от 10 до 35 °С.

Если значение влияющей величины отклоняется от нормального, то возникает еще *дополнительная погрешность*, связанная с изменением показаний прибора (или коэффициента преобразования преобразователя), из-за этого отклонения влияющей величины от нормального значения.

Реально уравнение преобразования включает и зависимость выходного сигнала от влияющих величин —  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$y = f(x, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.10)$$

Тогда связь между погрешностью выходной величины  $dy$  и чувствительностью прибора к влияющим величинам определяется при нахождении дифференциала:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n = S_x dx + S_{x_1} dx_1 + \dots + S_{x_n} dx_n. \quad (3.11)$$

Отсюда видно, что влияющая величина не будет вызывать погрешность в следующих случаях:

1) если  $dx_i = 0$ , т. е. она не изменяется при измерении по сравнению со значением во время градуировки;

2)  $S_{x_i} = 0$  означает равенство нулю чувствительности к влияющей величине, что может быть удовлетворено за счет конструкции прибора или введения особых устройств, компенсирующих действие влияющей величины.

В настоящее время значения основной и дополнительных погрешностей для средств измерений нормируются. Эти значения являются наибольшими для данного СИ.

Погрешности могут быть выражены как в виде абсолютных ( $\Delta x$ ), так и относительных величин. *Относительную погрешность* выражают в процентах:

$$\gamma_0 = \frac{\Delta x}{x} 100 \%. \quad (3.12)$$

Для оценки СИ применяют так называемую *приведенную погрешность*, а в качестве нормирующего значения часто используют верхний предел измерения ( $x_{\max}$ ):

$$\gamma_{0(\Pi)} = \frac{\Delta x}{x_{\max}} 100 \%. \quad (3.13)$$

Приведенная погрешность устанавливает *класс точности прибора*:  $\gamma_{0(\Pi)} = C$ . В этом случае относительная погрешность измерения рассчитывается по формуле

$$\gamma_0 = \frac{\Delta x}{x} = \frac{C \cdot x_{\max}}{x} 100 \%. \quad (3.14)$$

Видно, что величина относительной погрешности измерения зависит от значения входной величины — чем меньше входная величина, тем больше относительная погрешность. В связи с этим обстоятельством рекомендуется проводить измерения во второй части шкалы прибора. Однако для более адекватной оценки СИ наряду с указанной составляющей абсолютной погрешности учитывают еще одну составляющую, связанную с несовершенством устройства прибора. В этом случае первую составляющую, которая увеличивается пропорционально текущему значению входной величины, рассматривают как погрешность чувствительности, обозначают  $\Delta_s$  и называют *мультипликативной*:

$$\Delta_s = \gamma_s x, \quad (3.15)$$

где  $\gamma_s$  — относительная погрешность чувствительности. Вторую составляющую погрешности, независимую от чувствительности СИ и постоянную в пределах диапазона измерений, называют *аддитивной* (например, это дрейф нуля). Обозначают ее  $\Delta_0$ . В связи с этим в документах на данное СИ абсолютную погрешность выражают двучленной формулой

$$\Delta x = \pm (\gamma_s x + \Delta_0). \quad (3.16)$$

Для относительной погрешности измерения получаем более полную, чем (3.14), формулу:

$$\gamma_0 = \frac{\Delta x}{x} = \pm \left[ \gamma_s + \left( \frac{\Delta_0}{x} \right) \right]. \quad (3.17)$$

Представим графически зависимость относительной погрешности от значения измеряемой величины  $x$  в пределах диапазона измерения  $X_H$  —  $X_B$  (рис. 3.3).

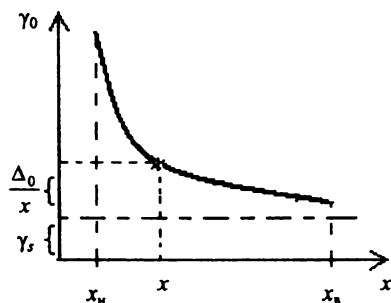


Рис. 3.3. Зависимость относительной погрешности от значения измеряемой величины  $x$

Это кривая гиперболического вида, асимптотически стремящаяся к  $\gamma_s$  при бесконечно больших значениях измеряемой величины. В соответствии с данным делением в паспорте на СИ приводится подобная двучленная формула. Например, для моста переменного тока при измерении емкости основная погрешность нормируется в виде формулы

$$\frac{\Delta C}{C} = \pm \left[ a + \frac{10}{C} (1 + a) \right], \quad (3.18)$$

где  $a$  — численное обозначение класса точности,  $C$  — измеряемая емкость в пФ.

### 3.1.4. Входное и выходное сопротивление, мощность, быстродействие, надежность

Во время проведения измерений объект измерения и СИ воздействуют друг на друга. При этом измерительная информация не должна искажаться из-за подключения СИ. Для оценки соблюдения этого требования СИ характеризуют входным и выходным сопротивлениями и входной и выходной мощностью. При проведении электрических измерений требования к *входному сопротивлению* можно сформулировать следующим образом:

— *большое входное сопротивление* требуется тогда, когда сигнал от объекта измерения выдается в форме напряжения, при этом потребляется минимум тока, а стало быть, и мощности (примером может служить вольтметр — чем больше входное сопротивление вольтметра, тем меньше его искажающее влияние на измеряемое напряжение);

— *малое входное сопротивление* требуется тогда, когда сигнал от объекта измерения выдается в форме тока (примером может служить амперметр — чем меньше его входное сопротивление, тем меньше вносимое им искажение в измеряемый ток).

*Выходное сопротивление* определяет ту мощность, которая может быть передана следующему преобразователю или индикатору при данном уровне выходного сигнала. Поэтому в единой последовательной цепи необходимо проводить согласование выходного сопротивления предыдущего преобразователя с входным сопротивлением последующего преобразователя.

При рассмотрении быстродействия следует разделять аналоговые и цифровые приборы. Для *аналоговых приборов* непосредственной оценки нормируется *время успокоения прибора* — промежуток времени с момента включения измеряемой величины до момента, когда указатель отсчетного устройства не будет удаляться от установившегося отклонения более чем на 1 % длины шкалы. Другими словами, это время, необходимое для установления показаний. Для большинства приборов время успокоения не должно превышать 4 с, т. е. новый отсчет можно производить не ранее, чем через 4 с.

Для *цифровых приборов* характерным является так называемое *время измерения*, т. е. время, необходимое для обработки

входного сигнала и его индикации. Быстродействием цифровых приборов называют отношение числа измерений за некоторый промежуток времени к этому промежутку. Современные цифровые приборы характеризуются быстродействием до десятков тысяч измерений и более в секунду.

*Надежность* определяется как свойство изделия выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные параметры в установленных пределах в течение заданного времени и в заданных условиях эксплуатации. В отношении СИ это означает сохранение в течение установленного времени предельных значений основной и дополнительной погрешностей в допустимых пределах.

Со временем возможно ухудшение параметров отдельных узлов прибора, что может приводить к постепенному уходу погрешностей за нормируемые пределы. Оценка такого времени позволяет устанавливать обоснованные сроки периодического контроля и поверки СИ. Расчет показателей надежности — сложная и не решенная до конца задача.

### **3.2. Динамические характеристики и параметры СИ**

В динамическом режиме измерений входная величина зависит от времени. В этом режиме точность измерений определяется динамическими свойствами СИ и характером изменения входной величины, которая наиболее часто изменяется либо синусоидально, либо ступенчато.

В основе работы СИ по-прежнему лежит уравнение преобразования, а основными параметрами в динамическом режиме по-прежнему являются чувствительность и погрешность, которые теперь уже связаны с амплитудой и частотой входного сигнала.

*Динамической чувствительностью* преобразователя является функция, представляющая собой отношение мгновенных значений выходной и входной величин. По выражению для динамической чувствительности можно выделить группы типичных преобразователей:

1) *безинерционные преобразователи*, чувствительность которых не зависит от частоты входного сигнала (и в этом смысле являющихся идеальными);

2) *инерционные преобразователи*, у которых чувствительность зависит от частоты; при этом выделяют два случая:

а) если  $S \sim \omega$ , то преобразователь *идеально дифференцирующий*;

б) если  $S \sim 1/\omega$ , то преобразователь *идеально интегрирующий*.

Таким образом, если под *идеальным преобразователем* понимать преобразователь, осуществляющий заданное преобразование без искажений, то к идеальным преобразователям можно отнести как безинерционные, так и инерционные преобразователи с указанными выше зависимостями чувствительности от частоты.

1. Для безинерционного преобразователя уравнение преобразования имеет вид

$$y_{\text{вых}}(t) = Sx_{\text{вх}}(t), \quad (3.19)$$

где  $S \neq S(\omega)$ , откуда измеряемая величина может быть определена по выходному (регистрируемому) сигналу  $y_{\text{вых}}(t)$ ,

$$x_{\text{вх}}(t) = (1/S)y_{\text{вых}}(t). \quad (3.20)$$

При этом отсутствует погрешность определения  $x(t)$ , обусловленная изменением входной величины во времени. Другими словами, выходной сигнал  $y_{\text{вых}}(t)$  СИ точно отображает изменение входной величины независимо от характера ее изменения.

2. Для инерционных идеальных преобразователей также отсутствует погрешность определения  $x(t)$ , обусловленная изменением входной величины во времени.

*Реальные преобразователи* (СИ) обладают инерционными, или динамическими, свойствами, когда изменение выходной величины от времени отличается от такового для входной величины из-за наличия элементов, запасующих энергию, например, подвижных элементов, обладающих массой, или упругих элементов в электромеханических преобразователях, а также емкостей и индуктивностей в измерительных цепях. Это ведет к более сложной зависимости между  $x_{\text{вх}}(t)$  и  $y_{\text{вых}}(t)$ .

### 3.2.1. Свойства дифференцирующего преобразователя

Для дифференцирующего преобразователя выходная величина пропорциональна производной от входной величины.

Таким образом, для идеального дифференцирующего преобразователя уравнение преобразования имеет вид

$$y_{\text{вых}} = S_0 \tau \left( \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} \right), \quad (3.21)$$

где  $S_0$  — статическая чувствительность,  $\tau$  — постоянная времени (времени преобразования, наличие  $\tau$  согласует также размерности величин в уравнении).

Чтобы найти динамическую чувствительность дифференцирующего преобразователя (т. е. отношение мгновенных значений выходной и входной величин), необходимо решить это дифференциальное уравнение.

Для решения этой задачи применим так называемый *операторный метод определения динамических характеристик*. В соответствии с этим методом решаемое уравнение записывают в операторной форме, т. е. в особой форме записи, при которой уравнение преобразования по-прежнему связывает через параметры преобразователя, но теперь уже не входную и выходную величины, а их операторные изображения.

Уравнение дифференцирующего преобразователя в операторной форме приобретает вид

$$Y(p) = S_0 \tau p X(p), \quad (3.22)$$

где  $p = d/dt$  — оператор, действующий на входную величину и трактуемый как множитель,  $X(p)$ ,  $Y(p)$  — операторные изображения входной и выходной величин. Далее из полученного уравнения, следуя определению чувствительности, можно выразить чувствительность, но это будет так называемая *операторная чувствительность*:

$$S(p) = \frac{Y_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = S_0 \tau p. \quad (3.23)$$

Получив общее выражение для нахождения операторной чувствительности, конкретизируем форму входного сигнала и рас-



смотрим два случая: синусоидального и ступенчатого входного сигнала.

1. Пусть на вход дифференцирующего преобразователя воздействует *синусоидально изменяющаяся величина*. При этом входной и выходной сигналы рассматривают как комплексные величины, и свойства преобразователя принято характеризовать *комплексной чувствительностью* (это динамическая чувствительность при работе с синусоидальными сигналами):

$$\dot{S} = \frac{\dot{Y}_{\text{вых}}}{\dot{X}_{\text{вх}}} = f(j\omega), \quad (3.24)$$

где  $\dot{X} = X_m(\omega)e^{j\omega t}$ ,  $\dot{Y} = Y_m(\omega)e^{j[\omega t + \Phi(\omega)]}$  — входной и выходной сигналы с амплитудами  $X_m$  и  $Y_m$ , сдвинутые по фазе на угол  $\Phi$ ,  $\omega$  — частота входного сигнала,  $j$  — комплексная единица.

Таким образом, комплексная чувствительность одновременно характеризует и частотные, и фазовые свойства преобразователя.

В соответствии с операторным методом комплексная чувствительность может быть получена из общего выражения для операторной чувствительности путем замены оператора  $p$  на число  $j\omega$  (действительно, подставляя в (3.3) выражение для входного сигнала в экспоненциальной форме, видим, что дифференцирование сводится к домножению на  $j\omega$ ).

Тогда для комплексной чувствительности дифференцирующего преобразователя в этом случае имеем

$$\dot{S} = jS_0\tau\omega. \quad (3.25)$$

Из (3.25) видно, что в динамическом режиме *комплексная чувствительность* дифференцирующего преобразователя при подаче на его вход синусоидального сигнала линейно зависит от частоты, т. е. он ведет себя как идеально дифференцирующий.

Вообще в практических целях широко используют амплитудно-частотную характеристику преобразователя (или просто частотную) — АЧХ, которая и задает зависимость динамической чувствительности от частоты.

Под АЧХ понимают отношение модулей комплексных величин  $|\dot{X}_{\text{вх}}|$  и  $|\dot{Y}_{\text{вых}}|$ , которое, с другой стороны, является модулем комплексной чувствительности:

$$|\dot{S}| = \frac{|\dot{Y}_{\text{вых}}|}{|\dot{X}_{\text{вх}}|} = f(\omega). \quad (3.26)$$

Для АЧХ дифференцирующего преобразователя, взяв модуль от выражения для его комплексной чувствительности (3.25), имеем

$$|\dot{S}| = S_0 \tau \omega. \quad (3.27)$$

Представим эту зависимость графически (рис. 3.4).

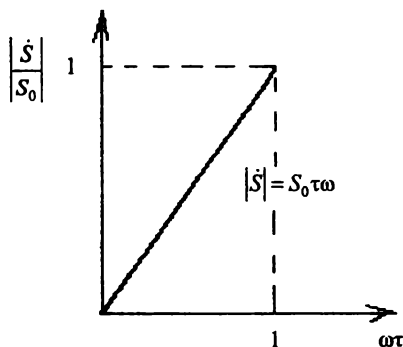


Рис. 3.4. Частотная зависимость нормированной динамической чувствительности дифференцирующего преобразователя

Таким образом, *динамическая чувствительность* дифференцирующего преобразователя линейно зависит от частоты входного сигнала, эта зависимость и является его АЧХ.

Поскольку в преобразователе наряду с амплитудой на выходе может изменяться и фаза поступающего на вход сигнала, то наряду с АЧХ преобразователя на практике рассматривают и его фазовую характеристику.

Под *фазовой характеристикой* понимают зависимость сдвига фазы между входным и выходным сигналом от частоты:

$$\varphi = f_{\varphi}(\omega). \quad (3.28)$$

Этот фазовый сдвиг, очевидно, может быть определен из комплексной чувствительности так же, как это делается при определении аргумента комплексного числа:

$$\varphi = \arctg \frac{\operatorname{Im} \dot{S}}{\operatorname{Re} \dot{S}}. \quad (3.29)$$

Таким образом, *фазовая характеристика* — это аргумент комплексной чувствительности.

В нашем случае дифференцирующего преобразователя и синусоидального сигнала из выражения (3.25) для комплексной чувствительности имеем  $\operatorname{Re} \dot{S} = 0$ , а  $\operatorname{Im} \dot{S} = S_0 \tau \omega$ , откуда  $\varphi = +90^\circ$ .

Графически фазовая характеристика представляет собой прямую линию (рис. 3.5).

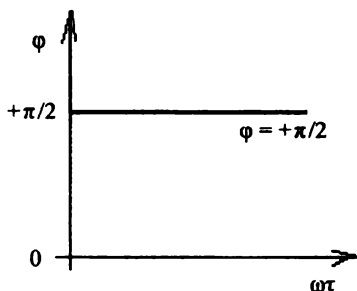


Рис. 3.5. Фазовая характеристика дифференцирующего преобразователя

Таким образом, выходной сигнал дифференцирующего преобразователя по фазе на  $90^\circ$  опережает входной.

При синусоидальном сигнале на входе дифференцирующего преобразователя его чувствительность оказывается пропорциональной частоте, а по фазе выходной сигнал на  $90^\circ$  опережает входной.

2. Теперь пусть на вход дифференцирующего преобразователя воздействует *величина, изменяющаяся скачкообразно* (рис. 3.6). В этом случае свойства преобразователя принято оценивать с помощью переходной характеристики.

*Переходная характеристика* — это зависимость выходной величины от времени при скачкообразном изменении входной величины.

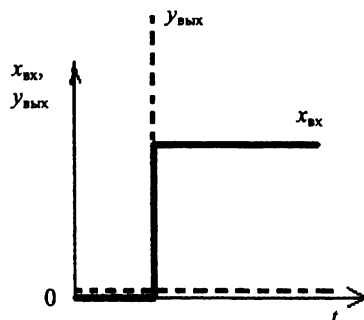


Рис. 3.6. Входной сигнал и переходная характеристика идеального дифференцирующего преобразователя

Для идеального дифференцирующего преобразователя при скачкообразном изменении  $x_{\text{вх}}$  выходная величина, в соответствии с его уравнением преобразования (3.21), теоретически мгновенно изменяется до бесконечно большой величины и снова до нуля, как идеальная  $\delta$ -функция.

### 3.2.2. Свойства реального дифференцирующего преобразователя

Примером *реального дифференцирующего преобразователя* является дифференцирующая  $R - C$  цепь. Рассмотрим схему такой цепи (рис. 3.7).

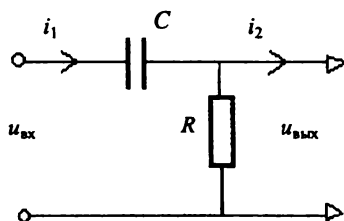


Рис. 3.7. Схема дифференцирующей  $R - C$  цепи

Для этой цепи при условии  $i_2 = 0$  (когда цепь разомкнута или замкнута на большое сопротивление) верно следующее соотношение для напряжений:

$$u_{\text{вх}} = u_C + u_R = \frac{1}{C} \int i_1 dt + i_1 R, \quad (3.30)$$

Учтем, что  $u_{\text{вых}} = i_1 R$ , откуда  $i_1 = u_{\text{вых}}/R$ , тогда

$$u_{\text{вх}} = \frac{1}{RC} \int u_{\text{вых}} dt + u_{\text{вых}}, \quad (3.31)$$

где  $RC = \tau$  — постоянная времени цепи. После дифференцирования обеих частей уравнения получаем уравнение преобразования реального дифференцирующего преобразователя:

$$\tau \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + u_{\text{вых}} = \tau \frac{du_{\text{вх}}}{dt}. \quad (3.32)$$

В общем виде уравнение реального дифференцирующего преобразователя имеет вид

$$\tau \frac{dy_{\text{вых}}}{dt} + y_{\text{вых}} = S_0 \tau \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}. \quad (3.33)$$

Для нахождения АЧХ и фазовой характеристики реального дифференцирующего преобразователя воспользуемся операторным методом и запишем уравнение (3.33) в операторной форме ( $d/dt \rightarrow p$ ):

$$\tau p Y_{\text{вых}}(p) + Y_{\text{вых}}(p) = S_0 \tau p X_{\text{вх}}(p). \quad (3.34)$$

Преобразуем уравнение  $(1 + \tau p) Y_{\text{вых}}(p) = S_0 \tau p X_{\text{вх}}(p)$  и запишем *операторную чувствительность* реального дифференцирующего преобразователя, или его *передаточную функцию*:

$$S(p) = \frac{Y_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{S_0 \tau p}{1 + \tau p}. \quad (3.35)$$

**1. Синусоидальный сигнал на входе.** Полагая форму входного сигнала синусоидальной, путем замены  $p$  на  $j\omega$  получаем комплексную чувствительность:

$$\dot{S} = \frac{\dot{Y}_{\text{вых}}}{\dot{X}_{\text{вх}}} = S_0 \frac{\tau j\omega}{1 + \tau j\omega}. \quad (3.36)$$

И, наконец, найдя модуль полученного комплексного числа, получим амплитудно-частотную характеристику:

$$|\dot{S}| = \frac{|\dot{Y}_{\text{вых}}|}{|\dot{X}_{\text{вх}}|} = S_0 \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}, \quad (3.37)$$

а затем фазовую характеристику как аргумент этого комплексного числа:

$$\varphi = \arctg \frac{1}{\omega\tau}. \quad (3.38)$$

Представим полученные характеристики в виде графических зависимостей от переменной  $\omega\tau$  (рис. 3.8).

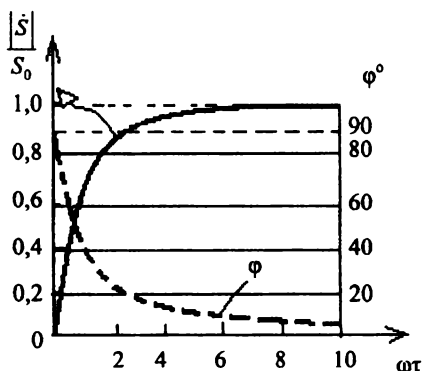


Рис. 3.8. Частотная и фазовая характеристики реального дифференцирующего преобразователя

Из рис. 3.8 видно, что для реального дифференцирующего преобразователя *на низких частотах* (при  $\omega\tau \ll 1$ ) его чувствительность (уравнение 3.37, сплошная кривая) становится пропорциональной частоте, т. е. он приближается к идеальному дифференцирующему преобразователю; *на высоких частотах* (при  $\omega\tau \gg 1$ ) его чувствительность (3.37) не зависит от частоты, т. е. он ведет себя как безинерционный преобразователь.

**2. Ступенчатый сигнал на входе.** При подаче на вход реального дифференцирующего преобразователя сигнала ступенчатой формы с постоянной амплитудой  $X_0 = \text{const}$  его переходная ха-

рактика  $Y = Y(t)$  находится как решение дифференциального уравнения преобразователя (3.33):

$$\tau \frac{dy_{\text{вых}}}{dt} + y_{\text{вых}} = S_0 \tau \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}.$$

Решением этого уравнения с учетом нулевых начальных условий (т. е. при  $t = 0$ ,  $y_{\text{вых}} = 0$ ) является экспоненциальная функция:

$$y_{\text{вых}} = S_0 e^{-\frac{t}{\tau}} X_0 \quad (\text{рис. 3.9}).$$

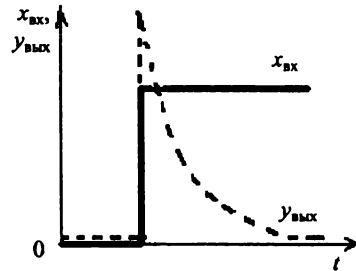


Рис. 3.9. Входной и выходной сигналы реального дифференцирующего преобразователя

Отсюда переходная чувствительность

$$S(t) = \frac{y_{\text{вых}}}{X_0} = S_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.39)$$

График для безразмерной чувствительности имеет следующий вид (рис. 3.10).

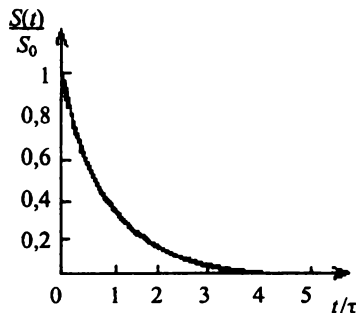


Рис. 3.10. Временная зависимость безразмерной чувствительности реального дифференцирующего преобразователя

**3. Погрешность реального дифференцирующего преобразователя.** При работе реального преобразователя в динамическом режиме возникает погрешность преобразования.

Под *динамической погрешностью преобразователя* понимают разность между динамической чувствительностью реального преобразователя и динамической чувствительностью идеального преобразователя, т. е. осуществляющего данное преобразование без искажений.

Выходная величина реального преобразователя может отличаться от выходной величины идеального преобразователя как по абсолютной величине, так и по временному сдвигу.

При преобразовании синусоидальной величины такое отличие и по значению, и по фазе будет еще и зависящим от частоты входного сигнала.

Погрешность по значению называют *амплитудно-частотной*, или *частотной, погрешностью* преобразователя.

Погрешность по фазе называют *фазово-частотной*, или *фазовой, погрешностью* преобразователя.

а. Рассмотрим амплитудно-частотную погрешность реального дифференцирующего преобразователя, возникающую при синусоидальном сигнале на входе.

Динамические чувствительности идеального (3.27) и реального (3.36) преобразователей при синусоидальном сигнале были найдены выше. Тогда по определению для динамической погрешности реального преобразователя имеем

$$\gamma_{\omega} = \frac{|\dot{S}_p| - |\dot{S}_n|}{|\dot{S}_n|} = \frac{\frac{S_0 \omega \tau}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} - S_0 \omega \tau}{S_0 \omega \tau} = \frac{1 - \sqrt{1 + (\omega \tau)^2}}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}}, \quad (3.40)$$

где  $|\dot{S}_n|$  и  $|\dot{S}_p|$  — частотные характеристики идеального и реального преобразователей соответственно. Из полученного выражения следует, что частотная погрешность является функцией частоты, отрицательна и возрастает по абсолютной величине с увеличением частоты.

Графически эта зависимость имеет вид, представленный на рис. 3.11. По графику при заданном  $\tau$  легко определить погрешность на заданной частоте.



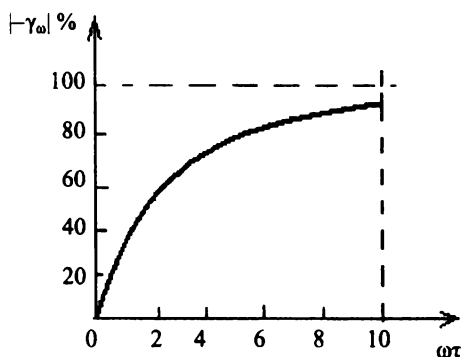


Рис. 3.11. Частотная зависимость погрешности реального дифференцирующего преобразователя

Из графика и выражения для  $\gamma_\omega$  (3.40) видно, что уменьшение частотной погрешности при заданной частоте возможно за счет снижения постоянной времени преобразователя  $\tau$  (при этом числитель стремится к нулю, а знаменатель к единице).

Однако из анализа выражения для чувствительности (3.37) следует, что снижение  $\tau$  ведет к снижению чувствительности преобразователя. Например, для дифференцирующей  $R - C$  цепи показано, что отношение  $u_{\text{вых}} : u_{\text{вх}}$  при  $\gamma_\omega = -1\%$  будет не более 1:7.

б. На высоких частотах преобразователь, обладающий дифференцирующими свойствами, ведет себя как безинерционный (см. выше). Выразим погрешность данного преобразователя, если использовать его в качестве безинерционного. При записи погрешности учтем, что чувствительность реального преобразователя по-прежнему задается (3.37), а для безинерционного преобразователя чувствительность вовсе не зависит от частоты (если он идеальный безинерционный) и определяется только его номинальной чувствительностью —  $S_0$ . Тогда

$$\gamma_\omega = \frac{|\dot{S}_p| - |\dot{S}_n|}{|\dot{S}_n|} = \frac{\frac{S_0 \omega \tau}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} - S_0}{S_0} = \frac{\omega \tau}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} - 1. \quad (3.41)$$

Видно, что чем выше частота (чем ближе преобразователь к безинерционному), тем меньше погрешность преобразователя (отношение в первом члене стремится к единице).

Наибольшая погрешность возникает при низких частотах.

Погрешность преобразователя уменьшается с ростом частоты и при  $\omega \rightarrow \infty$  стремится к нулю.

Погрешность преобразователя тем меньше, чем больше постоянная времени  $\tau$ . Уже при  $\omega\tau \geq 10$  она становится пренебрежимо малой.

**4. Частотным диапазоном преобразователя** называется область частот, в которой АЧХ и ФЧХ реального преобразователя отличаются от идеальных характеристик не более чем на величину допустимых погрешностей.

### 3.2.3. Свойства интегрирующего преобразователя

Идеальный интегрирующий преобразователь имеет следующее уравнение преобразования:

$$y_{\text{вых}} = \frac{S_0}{\tau} \int x_{\text{вх}} dt, \quad (3.42)$$

или в дифференциальной форме

$$\tau \frac{dy_{\text{вых}}}{dt} = S_0 x_{\text{вх}}, \quad (3.43)$$

где  $S_0$  — статическая чувствительность,  $\tau$  — постоянная времени преобразователя.

Решим задачу нахождения АЧХ и ФЧХ интегрирующего преобразователя в рамках операторного подхода. В операторной форме уравнение (3.43) имеет вид:

$$\tau p Y_{\text{вых}}(p) = S_0 X_{\text{вх}}(p), \quad (3.43')$$

где  $X_{\text{вх}}(p)$ ,  $Y_{\text{вых}}(p)$  — операторные изображения входной и выходной величин,  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования.

Поэтому операторная чувствительность (или передаточная функция)

$$S(p) = \frac{Y_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{S_0}{\tau p}. \quad (3.44)$$

**1. Рассмотрим случай подачи на вход интегрирующего преобразователя синусоидально изменяющейся величины.** В соответст-

вии с операторным методом его комплексная чувствительность находится из (3.44) путем замены  $p \rightarrow j\omega$ :

$$\dot{S} = \frac{\dot{Y}_{\text{вых}}}{\dot{X}_{\text{вх}}} = \frac{S_0}{j\omega\tau} = -j \frac{S_0}{\omega\tau}. \quad (3.45)$$

Тогда АЧХ определяется как модуль комплексной чувствительности:

$$|\dot{S}| = \frac{|\dot{Y}_{\text{вых}}|}{|\dot{X}_{\text{вх}}|} = \frac{S_0}{\omega\tau}. \quad (3.46)$$

Видно, что АЧХ интегрирующего преобразователя обратно пропорциональна частоте входного сигнала, как это и следовало ожидать для идеального интегрирующего преобразователя.

Построим зависимость нормированной на  $S_0$  чувствительности от  $\omega\tau$  (безразмерная АЧХ), которая, очевидно, имеет вид гиперболы (см. рис. 3.12, пунктирная линия).

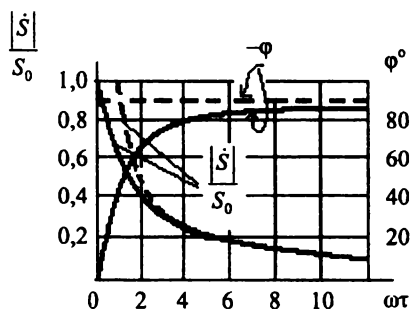


Рис. 3.12. Безразмерные АЧХ и ФЧХ идеального (пунктир) и реального (сплошные линии) интегрирующего преобразователя

Для нахождения ФЧХ необходимо определить аргумент комплексной чувствительности  $\varphi$ . Поскольку  $\text{Re } \dot{S} = 0$ , а  $\text{Im } \dot{S} = -\frac{S_0}{\omega\tau}$ , то  $\varphi = \arctg(-\infty) = -\pi/2$ .

Отсюда следует, что фазовая характеристика не зависит от частоты входного сигнала и характеризует отставание выходной величины от входной на угол  $\pi/2$  (рис. 3.12, пунктирная линия).

2. Рассмотрим свойства интегрирующего преобразователя при подаче на его вход *ступенчатого входного сигнала*  $X_{\text{вх}} = X_0 = \text{const}$  при нулевых начальных условиях. Из общего уравнения преобразования идеального интегрирующего преобразователя получим сначала переходную характеристику (т. е. зависимость выходного сигнала от времени):

$$y_{\text{вых}} = \frac{S_0}{\tau} \int X_0 dt = \frac{S_0 X_0}{\tau} t, \quad (3.47)$$

где  $t$  — общее время интегрирования, а затем переходную чувствительность:

$$S(t) = \frac{y_{\text{вых}}}{X_0} = \frac{S_0}{\tau} t. \quad (3.48)$$

Построим зависимость нормированной на  $S_0$  чувствительности от  $t/\tau$  (рис. 3.13, пунктирная линия).

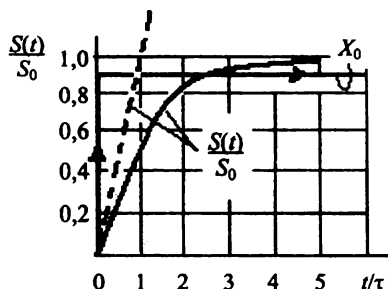


Рис. 3.13. Входной сигнал ( $X_0$ ) и нормированная переходная чувствительность идеального (пунктир) и реального (сплошная линия) интегрирующего преобразователя

Видно, что выходной сигнал ( $y_{\text{вых}}$ ) линейно нарастает со временем интегрирования, как и чувствительность, которая также растет со временем.

### 3.2.4. Свойства реального интегрирующего преобразователя

Примером реального интегрирующего преобразователя является пассивная интегрирующая  $R - C$  цепь (рис. 3.14).

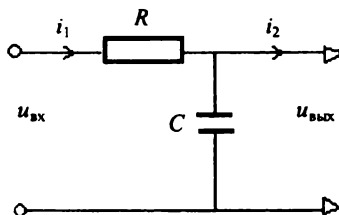


Рис. 3.14. Схема интегрирующей  $R - C$  цепи

Положим в этой цепи  $i_2 = 0$  (цепь замкнута на большое сопротивление или разомкнута) и получим уравнение преобразования, исходя из анализа цепи.

Поскольку  $u_{вх} = i_1 R + u_{вых}$ , то  $i_1 = \frac{u_{вх} - u_{вых}}{R}$ . Тогда для  $u_{вых}$  с учетом того, что это напряжение на конденсаторе, имеем  $u_{вых} = \frac{1}{C} \int i_1 dt = \frac{1}{RC} \int (u_{вх} - u_{вых}) dt$ . Введем обозначение  $RC = \tau$  (это постоянная времени  $R - C$  цепи) и после дифференцирования получим  $\tau \frac{du_{вых}}{dt} + u_{вых} = u_{вх}$ . Обобщим это уравнение на любой реальный интегрирующий преобразователь, который получил также название аperiodического, или инерционного, звена первого порядка:

$$\tau \frac{dy_{вых}}{dt} + y_{вых} = S_0 x_{вх}. \quad (3.49)$$

Для определения свойств реального интегрирующего преобразователя запишем уравнение преобразования в операторной форме:

$$\begin{aligned} \tau p Y_{вых}(p) + Y_{вых}(p) &= \\ = S_0 X_{вх}(p) &\Rightarrow (1 + \tau p) Y_{вых}(p) = S_0 X_{вх}(p). \end{aligned} \quad (3.49')$$

Откуда для операторной чувствительности имеем

$$S(p) = \frac{Y_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{S_0}{1 + \tau p}. \quad (3.50)$$

1. *Случай синусоидального сигнала* на входе реального преобразователя. Получим выражение для комплексной проницаемости путем замены  $p \rightarrow j\omega$  в (3.50):

$$\dot{S} = \frac{\dot{Y}_{\text{вых}}}{\dot{X}_{\text{вх}}} = \frac{S_0}{1 + j\omega\tau}. \quad (3.51)$$

Откуда АЧХ

$$|\dot{S}| = \frac{|\dot{Y}_{\text{вых}}|}{|\dot{X}_{\text{вх}}|} = \frac{S_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}. \quad (3.52)$$

Для ФЧХ имеем

$$\varphi = \text{arctg} \frac{\text{Im} \dot{S}}{\text{Re} \dot{S}} = \text{arctg}(-\omega\tau). \quad (3.53)$$

На вышеприведенном рис. 3.12 сплошными линиями представлены результаты, полученные для АЧХ и ФЧХ реального интегрирующего преобразователя.

Видно, что безразмерная чувствительность реального интегрирующего преобразователя уменьшается почти обратно пропорционально  $\omega\tau$ , т. е. падает с частотой и близка по характеру к зависимости для идеального интегрирующего преобразователя. При  $\omega\tau \gg 1$  преобразователь приближается к идеальному интегрирующему преобразователю, при  $\omega\tau \ll 1$  — к безинерционному.

Фазовая характеристика, т. е. угол сдвига фаз между выходным и входным сигналами, нарастает с увеличением частоты и асимптотически стремится к  $\pi/2$ .

2. *Случай ступенчатого сигнала* на входе реального интегрирующего преобразователя. Подставим в уравнение преобразования (3.49)  $x_{\text{вх}} = X_0 = \text{const}$  и получим

$$\tau \frac{dy_{\text{вых}}}{dt} + y_{\text{вых}} = S_0 X_0. \quad (3.54)$$

Переходная характеристика может быть найдена путем решения этого уравнения, которое имеет следующий вид:

$$y_{\text{вых}}(t) = S_0 X_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (3.55)$$

где  $S_0 X_0 = y_{\text{вых}}(\infty)$  есть установившееся значение выходной величины. Тогда для переходной характеристики имеем

$$S(t) = \frac{y_{\text{вых}}}{X_0} = S_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \Rightarrow \frac{S(t)}{S_0} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.56)$$

Относительная переходная характеристика представлена графически сплошной линией на рис. 3.13.

Таким образом, при подаче на вход реального интегрирующего преобразователя сигнала ступенчатой формы выходной сигнал с течением времени нарастает, асимптотически приближаясь к некоторому установившемуся значению. То же происходит и с чувствительностью преобразователя.

3. *Погрешность.* Преобразователь, описываемый уравнением (3.49), который мы выше называли интегрирующим, или апериодическим, звеном первого порядка, можно использовать двумя способами — по своему прямому назначению для интегрирования и в качестве безинерционного.

а. Определим относительную амплитудно-частотную погрешность при интегрировании сначала синусоидально изменяющейся величины. Следуя определению динамической погрешности, получим

$$\gamma_{\omega} = \frac{|\dot{S}_p| - |\dot{S}_н|}{|\dot{S}_н|} = \frac{\frac{S_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} - \frac{S_0}{\omega\tau}}{\frac{S_0}{\omega\tau}} = \frac{\omega\tau - \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}. \quad (3.57)$$

Представим эту зависимость графически (рис. 3.15).

Видно, что погрешность интегрирования всюду отрицательна и резко стремится к нулю при росте  $\omega$ , точнее,  $\omega\tau$ . Поэтому погрешность интегрирующего преобразователя будет тем меньше (по абсолютной величине), чем больше постоянная времени  $\tau$  и чем больше частота  $\omega$  (тогда как для дифференцирующего преобразователя, данные для которого — для сравнения — приведены

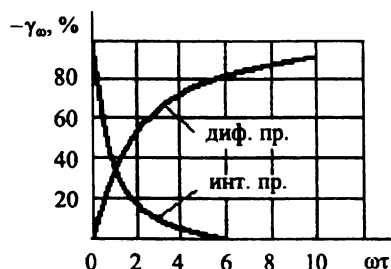


Рис. 3.15. Амплитудно-частотная погрешность интегрирующего преобразователя (в сравнении с погрешностью дифференцирующего преобразователя)

также на рис. 3.15, погрешность падает с уменьшением  $\tau$  и  $\omega$ ). Однако следует иметь в виду, что увеличение  $\tau$ , как и для дифференцирующего преобразователя, приводит к уменьшению чувствительности —  $|\dot{S}| \sim \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$ .

б. Теперь определим абсолютную переходную амплитудную погрешность при интегрировании сигнала ступенчатой формы с амплитудой  $X_0$ .

$$\Delta y = y_{\text{вых.р}} - y_{\text{вых.ид}} = S_0 X_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - S_0 X_0 \frac{t}{\tau} = S_0 X_0 (1 - \frac{t}{\tau} - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (3.58)$$

Видно, что переходная погрешность интегрирования ступенчатого сигнала непрерывно растет и при  $t \rightarrow \infty$  бесконечно велика и отрицательна по знаку.

в. Рассмотрим теперь погрешность аperiodического преобразователя, используемого в качестве *безинерционного*. При измерении *синусоидально изменяющихся величин*, следуя определению погрешности, имеем

$$\gamma_\omega = \frac{|\dot{S}_p| - |\dot{S}_н|}{|\dot{S}_н|} = \frac{\frac{S_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} - S_0}{S_0} = \frac{1 - \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}, \quad (3.59)$$



где  $S_0$  — частотная характеристика идеального безинерционного преобразователя,  $S_p$  — частотная характеристика реального интегрирующего преобразователя, используемого, однако, для измерения самой величины  $x_{вх}$ , а не ее интеграла.

Формула эта в точности соответствует формуле для погрешности дифференцирующего преобразователя и синусоидальной величины на его входе.

Видно, что при очень малом значении  $\tau$ , когда  $(\omega\tau)^2 \ll 1$ , интегрирующий преобразователь приобретает свойства безинерционного. При этом отсутствует погрешность определения  $x(t)$ , обусловленная изменением входной величины во времени, а выходной сигнал  $y_{вых}(t)$  точно отображает изменение входной величины, независимо от характера ее изменения.

При подаче сигнала *ступенчатой формы* абсолютная переходная погрешность

$$\Delta y = y_{вых.р} - y_{вых.ид} = S_0 X_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - S_0 X_0 = -S_0 X_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.60)$$

В целом погрешность отрицательна, т. е. характеризует отставание выходной величины от установившегося значения  $y_{вых.р}(\infty) = S_0 X_0$ , которое наступает при  $t = \infty$ .

Видно: чем меньше постоянная 69—70 времени  $\tau$ , тем быстрее  $y_{вых}$  достигает установившегося значения и тем лучше для этих целей преобразователь.

### 3.2.5. Свойства колебательного преобразователя

К колебательным преобразователям относятся механические, акустические, гидравлические, электрические системы, в которых имеются обобщенные масса, успокоение и жесткость, взаимосвязанные дифференциальным уравнением 2-го порядка (рис. 3.16).

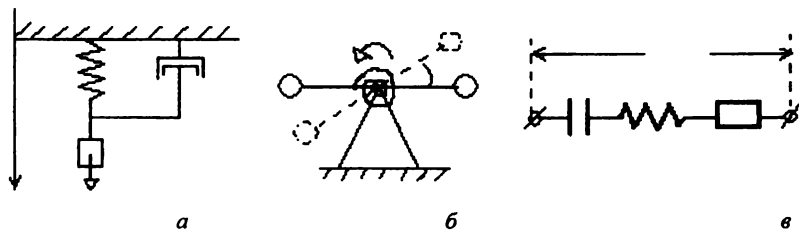


Рис. 3.16. Примеры механических (а, б) и электрического (в) колебательных преобразователей

Например, механическая система, содержащая подвижную массу  $m$ , пружину жесткостью  $c_0$  и успокоитель с коэффициентом успокоения  $P$  (рис. 3.16 а).

Уравнение движения массы после воздействия некоторой силой  $f_{\text{вх}}$  описывается дифференциальным уравнением 2-го порядка:

$$m \frac{d^2 y_{\text{вых}}}{dt^2} + P \frac{dy_{\text{вых}}}{dt} + C_0 y_{\text{вых}} = f_{\text{вх}}, \quad (3.61)$$

где  $y_{\text{вых}}$  — координата тела,  $f_{\text{вх}}$  — сила.

Например, механическая система с вращающейся подвижной частью (рис. 3.16 б — подвижная часть гальванометра, измерительного механизма, датчика угла поворота), имеющей момент инерции  $J$ , коэффициент успокоения  $P$ , пружину с жесткостью  $w$  (удельный противодействующий момент), при воздействии на нее вращающего устанавливающего момента  $M_x$  имеет угол поворота  $\alpha$ , зависящий от времени в соответствии с уравнением

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + P \frac{d\alpha}{dt} + w\alpha = M_{\text{вх}}. \quad (3.62)$$

Например, электрический контур из последовательно соединенных индуктивности  $L$ , емкости  $C$  и сопротивления  $R$  после зарядки конденсатора напряжением (рис. 3.16 в):

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = u_{\text{вх}}. \quad (3.63)$$

Таким образом, уравнение преобразования колебательного преобразователя можно описать дифференциальным уравнением вида

$$m \frac{d^2 y_{\text{вых}}}{dt^2} + P \frac{dy_{\text{вых}}}{dt} + C_0 y_{\text{вых}} = S_0 x_{\text{вх}}, \quad (3.64)$$

где  $m$ ,  $P$ ,  $C_0$  — обобщенные масса, коэффициент успокоения и жесткость,  $y_{\text{вых}}$  — обобщенное перемещение,  $f_{\text{вх}}$  — обобщенная сила. В зависимости от вида энергии меняются и конкретные понятия входящих в уравнение параметров  $m$ ,  $P$ ,  $C_0$ . Это уравнение можно представить также в виде

$$\frac{d^2 y_{\text{вмх}}}{dt^2} + h \frac{dy_{\text{вмх}}}{dt} + \omega_0^2 y_{\text{вмх}} = \frac{S_0}{m} x_{\text{вх}}, \quad (3.65)$$

где  $h = \frac{P}{m}$  — коэффициент, характеризующий успокоение,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{C_0}{m}}$  — угловая частота собственных колебаний преобразователя (т. е. при отсутствии успокоения),  $T_0$  — период собственных свободных незатухающих колебаний.

Применим операторный метод для нахождения динамических характеристик колебательного преобразователя. Уравнение преобразователя в операторной форме принимает вид

$$p^2 Y_{\text{вмх}}(p) + hp Y_{\text{вмх}}(p) + \omega_0^2 Y_{\text{вмх}}(p) = \frac{S_0}{m} X_{\text{вх}}(p). \quad (3.65')$$

Откуда операторная чувствительность

$$S(p) = \frac{Y_{\text{вмх}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{S_0}{m(p^2 + hp + \omega_0^2)}. \quad (3.66)$$

1. При гармоническом входном сигнале найдем комплексную чувствительность заменой  $p \rightarrow j\omega$ :

$$\dot{S} = \frac{\dot{Y}_{\text{вмх}}}{\dot{X}_{\text{вх}}} = \frac{S_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega h)}. \quad (3.67)$$

Амплитудная частотная характеристика (модуль  $\dot{S}$ ) равна

$$|\dot{S}| = \frac{S_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + h^2\omega^2}}. \quad (3.68)$$

Фазовая характеристика (т. е. аргумент комплексной величины  $\dot{S}$ ) этой величины характеризует разность фаз между  $\dot{Y}_{\text{вмх}}$  и  $\dot{X}_{\text{вх}}$ :

$$\alpha = \text{arctg} \frac{\text{Im} \dot{S}}{\text{Re} \dot{S}} = \text{arctg} \left( -\frac{h\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \quad (3.69)$$

В уравнения для частотной и фазовой характеристик входит коэффициент  $h$ , характеризующий успокоение ( $h = \frac{P}{m}$ , где  $P$  —

коэффициент успокоения,  $m$  — масса). Размерностью коэффициента  $h$  в механической, электрической и других колебательных системах является  $1/c$ , поэтому в общем уравнении ему удобно придать безразмерный вид, выражая его отношением к собственной частоте  $\omega_0$ .

Начнем преобразование с фазовой характеристики, поделив числитель и знаменатель в аргументе функции на  $\omega_0^2$ :

$$\alpha = \arctg \left( - \frac{\frac{h}{\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{\omega}{\omega_0^2} - 1} \right). \quad (3.69')$$

Введем  $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ ,  $\beta = \frac{h}{2\omega_0}$  и найдем для фазовой характеристики

$$\alpha = \arctg \left( - \frac{2\beta\eta}{\eta^2 - 1} \right). \quad (3.70)$$

$\beta = h/(2\omega_0)$  носит название степени успокоения. В электротехнике вводится аналогичный параметр  $d = 2\beta$ , который называется *затуханием электрического контура*, а коэффициент обратный затуханию  $1/d = Q$ , — *добротностью контура* (т. е. чем меньше затухание, тем выше добротность).

Для частотной характеристики, с учетом  $\omega_0^2 = \frac{C_0}{m}$ , получим

$$|\dot{S}| = \frac{S_0}{C_0 \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\beta\eta)^2}} \Rightarrow \frac{|\dot{S}| C_0}{S_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\beta\eta)^2}}. \quad (3.71)$$

Построим *безразмерные частотные характеристики* колебательного преобразователя при различных значениях степени успокоения  $\beta$  (рис. 3.17).

Для степени успокоения  $\beta = 1$  чувствительность в зависимости от частоты только снижается. Затем по мере снижения степени успокоения системы на кривой сначала появляется максимум,

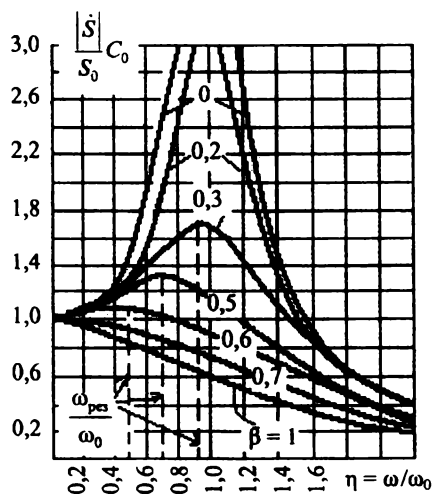


Рис. 3.17. Безразмерные амплитудно-частотные характеристики колебательного преобразователя при различных значениях степени успокоения  $\beta$

затем он растет и одновременно сдвигается к собственной частоте. В целом можно сделать следующие выводы:

- наиболее равномерный вид имеет частотная характеристика при степени успокоения  $\beta = 0,6—0,7$ ;
- при  $\beta \geq 1/\sqrt{2} = 0,707$  характеристика не имеет подъема;
- максимальное значение чувствительности при резонансной частоте  $\omega_{\text{рез}}$  и заданных  $S_0$  и  $C_0$  зависит только от степени успокоения  $\beta$ ;
- резонансная частота, найденная из условия экстремума АЧХ, зависит от степени успокоения и отличается от собственной частоты  $\omega_0$ :

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\beta^2}. \quad (3.72)$$

Построим фазовые характеристики колебательного преобразователя при различных значениях степени успокоения  $\beta$  — это семейство зависимостей разности фаз выходного и входного сигналов от относительной частоты  $\eta$  (рис. 3.18).

Видно, что все кривые пересекаются в общей точке с координатами  $\eta = 1$ ,  $\alpha = -90^\circ$  для любых степеней успокоения. В целом можно сделать следующие выводы:

— при частоте, равной частоте собственных колебаний преобразователя  $\omega_0$ , угол сдвига фаз между входной и выходной величинами составляет  $90^\circ$  и не зависит от степени успокоения системы;

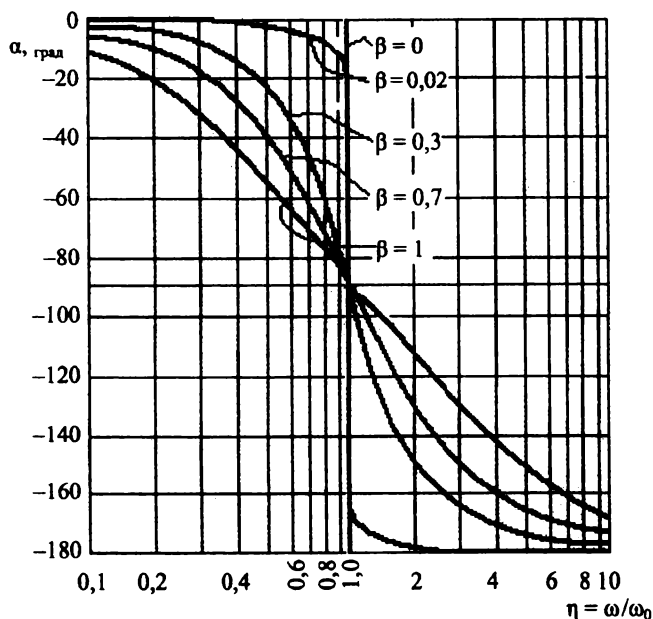


Рис. 3.18. Фазовые характеристики колебательного преобразователя при различных значениях степени успокоения  $\beta$

— при небольших степенях успокоения и частотах вблизи  $\omega_0$  сдвиг по фазе между входной и выходной величинами может почти скачком достигать значений в  $180^\circ$ ;

— при степени успокоения  $\beta = 0,65—0,7$  и при работе в диапазоне частот от 0 до  $\eta = 0,65—0,7$  фазовые характеристики можно приближенно рассматривать как прямые  $\alpha = k\omega$ , выходящие из начала координат ( $\eta = 0$ ,  $\alpha = 0$ ).

Выбор такой фазовой характеристики преобразователя важен при передаче сигналов сложной формы, состоящих из набора

гармоник, при этом будет обеспечиваться сдвиг по фазе, пропорциональный частоте, а искажение сигналов будет минимальным. Использование характеристики при  $\beta = 1$  нецелесообразно в связи с наименьшей величиной чувствительности преобразователя.

2. При ступенчатом входном сигнале для нахождения переходной характеристики колебательного преобразователя нужно решить уравнение, описывающее преобразование при следующих начальных условиях: до  $t = 0$ ,  $x_{вх} = 0$ , а после  $t = 0$ ,  $x_{вх} = X_0 = \text{const}$ .

$$\frac{d^2 y_{вх}}{dt^2} + h \frac{dy_{вх}}{dt} + \omega_0^2 y_{вх} = \frac{S_0}{m} x_{вх}. \quad (3.73)$$

Решение этого уравнения показывает, что возможны три разновидности переходного процесса (далее уже введена степень успокоения  $\beta = \frac{h}{2\omega_0}$ ). На рис. 3.19 представлен графически вид решений для некоторых конкретных значений  $\beta$ .

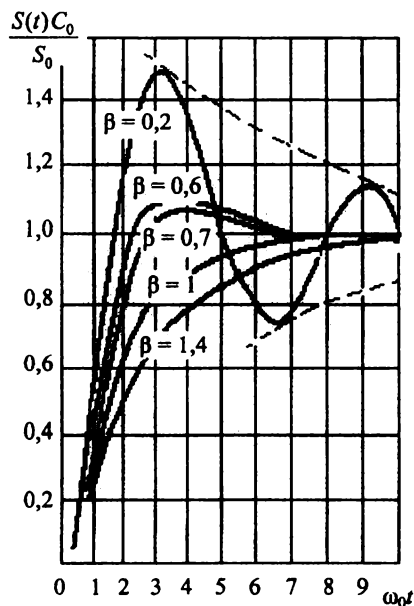


Рис. 3.19. Безразмерная чувствительность колебательного преобразователя при различных степенях успокоения  $\beta$

1. При  $\beta < 1$  (малая степень успокоения) — недоуспокоенный периодический режим, чувствительность преобразователя изменяется от времени (или  $y_{\text{вых}}(t)$ ) по закону колебательного переходного процесса

$$S(t) = \frac{y_{\text{вых}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{S_0}{C_0} \left[ 1 - \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin \left( \omega_0 t \sqrt{1-\beta^2} + \arctg \sqrt{\frac{1-\beta^2}{\beta^2}} \right) \right]. \quad (3.74)$$

Видно, что это свободные колебания с амплитудой, затухающей по экспоненте; когда  $S(t)C_0/S_0 = 1$ , время установления показаний велико.

2. При  $\beta = 1$  — критический режим, или критический переходный процесс

$$S(t) = \frac{y_{\text{вых}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{S_0}{C_0} [1 - e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t)]. \quad (3.75)$$

Видно, что выходной сигнал наиболее быстро приближается к установившемуся значению.

3. При  $\beta > 1$  — переуспокоенный режим, или аperiodический переходный процесс

$$S(t) = \frac{y_{\text{вых}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{S_0}{C_0} \left[ 1 - \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\sqrt{\beta^2-1}} \operatorname{sh} \left( \omega_0 t \sqrt{\beta^2-1} + \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{\beta^2-1}{\beta^2}} \right) \right]. \quad (3.76)$$

Видно, что кривая приближенно описывается экспонентой и время установления опять велико.

Теоретически время установления выходного сигнала равно бесконечности в любом из трех режимов, но время  $t_{\text{уст}}$ , после которого достигается значение  $y_{\text{вых}}(t)$ , отличающееся от установившегося не более чем на погрешность, — различно. Оказывается, что наиболее быстро установление показаний происходит в системах со степенью успокоения  $\beta = 0,6—0,7$ , к чему и стремятся в электроизмерительных приборах.

Ясно, что время установления выходного сигнала зависит и от степени успокоения  $\beta$ , и от периода собственных колебаний  $T_0$ . Эта зависимость для случая установления показаний с погрешностью



$\pm 1\%$  представлена на рис. 3.20, откуда видно, для этого случая минимальное время установления достигается при  $\beta = 0,82$ , т. е. в слегка недоуспокоенном режиме, а в пределах  $0,6 \leq \beta \leq 1,0$  время установления  $t_{уст} = T_0$ .

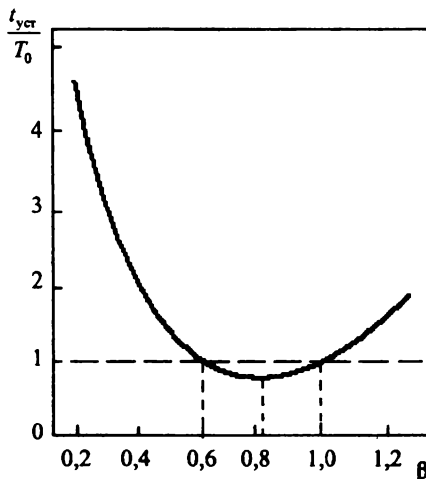


Рис. 3.20. Зависимость относительного времени установления показаний колебательного преобразователя от степени успокоения системы

3. *Определение погрешности колебательного преобразователя, случай синусоидального сигнала на входе колебательного преобразователя.* Амплитудно-частотная погрешность определяется по разности между частотными характеристиками реального и идеального преобразователей.

$$\gamma_{\omega} = \frac{\frac{S_0}{C_0 \sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\beta\eta)^2}} - \frac{S_0}{C_0}}{\frac{S_0}{C_0}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\beta\eta)^2}} - 1. \quad (3.77)$$

Рассмотрим зависимость погрешности от частоты синусоидального сигнала при разных степенях успокоения  $\beta$ . Соответствующие зависимости представлены на рис. 3.21.

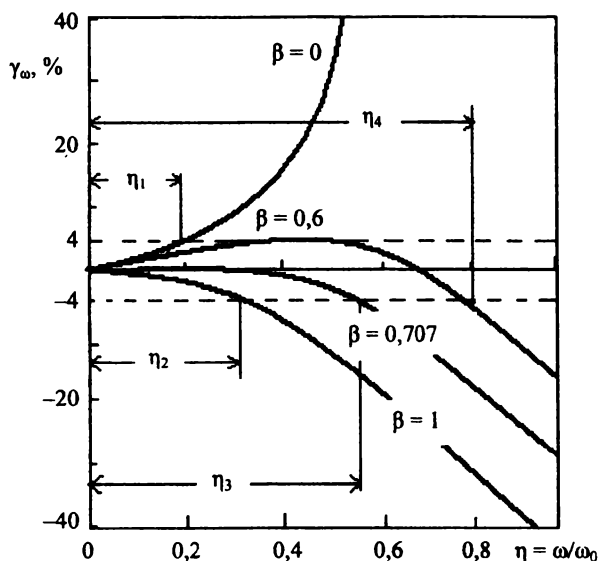


Рис. 3.21. Зависимость погрешности колебательного преобразователя от частоты при различных значениях степени успокоения системы

Остановимся на трех крайних режимах:  $\beta = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\beta = \sqrt{2}/2$ .

1.  $\beta = 0$ , т. е. успокоение отсутствует, тогда погрешность зависит от частоты по формуле

$$\gamma_\omega = \frac{\eta^2}{1 - \eta^2}. \quad (3.78)$$

Видно, что для  $\eta < 1$  ( $\omega < \omega_0$ ) погрешность быстро возрастает; при  $\eta = 1$  ( $\omega = \omega_0$ ) погрешность  $\rightarrow \infty$ ; при  $\eta > 1$  ( $\omega > \omega_0$ ) погрешность становится отрицательной и быстро увеличивается по абсолютной величине.

Реально успокоение всегда присутствует из-за воздуха и трения, но режим с малой степенью успокоения (обычно до  $\beta < 0,2—0,3$ ) из-за большой погрешности использовать нецелесообразно. Однако из выражения для чувствительности при  $\beta = 0$  следует, что чувствительность является высокой, особенно в области резонанса ( $\eta = 1$ ), и этим пользуются для создания высокочувствительных приборов.

2.  $\beta = 1$ , критическое успокоение. В этом случае погрешность

$$\gamma_{\omega} = \frac{1}{1 + \eta^2} - 1 = -\frac{\eta^2}{1 + \eta^2}. \quad (3.79)$$

Видно, что погрешность при всех частотах отрицательна и быстро возрастает с ростом частоты. Таким образом, этот режим также является нежелательным.

3.  $\beta = 0,707 = \sqrt{2}/2$ , при этом

$$\gamma_{\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} - 1. \quad (3.80)$$

Соответствующая кривая представлена на рис. 3.21.

Видно, что погрешность также всюду остается отрицательной, но возрастает значительно медленнее, чем при  $\beta = 1$ .

Если построить кривую погрешности для  $\beta = 0,6$ , то видно, что с изменением частоты погрешность изменяется наиболее благоприятно: до  $\eta = 0,6—0,7$  остается небольшой положительной (до +4 %), а при  $0,7 < \eta < 0,8$  — небольшой отрицательной (до -4 %).

Следует отметить, что для всех трех рассмотренных случаев в выражения для погрешности входит  $\eta$  и входит таким образом, что для уменьшения погрешности необходимо уменьшить  $\eta$ . Поскольку  $\eta = \omega/\omega_0$ , то отсюда следует, что при работе с синусоидальными сигналами динамическую погрешность колебательного преобразователя можно уменьшить, увеличивая его собственную частоту колебаний  $\omega_0$ . Однако уменьшение динамической погрешности за счет увеличения  $\omega_0$  будет сопровождаться уменьшением статической чувствительности преобразователя, что видно из (3.71) при  $\eta = 0$ .

Анализ погрешности при подаче *ступенчатого входного сигнала* показывает, что переходные погрешности колебательного преобразователя минимальны также при  $\beta = 0,6—0,7$  и уменьшаются с ростом частоты  $\omega_0$ .

## Глава 4

# ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ: КОНСТРУКЦИИ И ПРИНЦИПЫ РАБОТЫ

*Измерительный преобразователь* — это средство измерений, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для передачи, дальнейшего преобразования, обработки и хранения.

Измерительный преобразователь, к которому подводится измеряемая величина, называется *первичным измерительным преобразователем*.

Измерительные преобразователи в зависимости от вида входного и выходного сигналов делят на группы:

- *аналоговые* (преобразователи, у которых на входе и на выходе имеются аналоговые сигналы);
- *аналого-цифровые* (преобразователи, имеющие на входе аналоговый, а на выходе кодированный сигнал);
- *цифро-аналоговые* (преобразователи, у которых на входе кодированный сигнал, а на выходе аналоговый сигнал).

### 4.1. Электромеханические преобразователи

В электромеханических преобразователях энергия электромагнитного поля преобразуется в механическую энергию перемещения подвижной части преобразователя.

Таким образом, для электромеханического преобразователя входной величиной является электрическая величина, а выходной — угловое перемещение подвижной части преобразователя. Электромеханические преобразователи называют также измерительными механизмами (ИМ).

ИМ содержит следующие основные узлы:

- устройство, создающее вращающий момент или силу, величина которых зависит от входного электрического сигнала;
- устройство, создающее противодействующий момент или силу;
- отсчетное устройство;
- успокоитель.

*Вращающий момент или силу*, действующую на подвижную часть ИМ, можно найти как производную электромагнитной энергии, сосредоточенной в ИМ, соответственно по углу поворота  $\alpha$  или по линейному перемещению  $l$  подвижной части:

$$M_{\text{пр}} = \frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial \alpha}; \quad F = \frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial l}. \quad (4.1)$$

Выражение для электромагнитной энергии в общем случае имеет вид:

$$W_{\text{эм}} = \frac{1}{2} C_{1,2} U_{1,2}^2 + \frac{1}{2} L I^2 + M_{1,2} I_1 I_2, \quad (4.2)$$

где  $C_{1,2}$  — емкость между 1-м и 2-м телами ИМ,  $U_{1,2}$  — напряжение между ними,  $L$  — индуктивность некоторого контура ИМ, а  $I$  — ток в нем,  $M_{1,2}$  — коэффициент взаимной индуктивности между 1-м и 2-м контурами ИМ, а  $I_1$  и  $I_2$  — токи в них. Практически ИМ строят так, чтобы использовалась либо 1-я, либо 2-я, либо 3-я часть электромагнитной энергии. В соответствии с этим электромеханические преобразователи делят:

- на *электростатические*, использующие 1-ю часть;
- *электромагнитные*, использующие 2-ю часть;
- *электродинамические*, ферродинамические, магнитоэлектрические и индукционные, использующие 3-ю часть  $W_{\text{эм}}$  и отличающиеся друг от друга конструктивно.

Равновесие подвижной части ИМ достигается при равенстве вращающего и противодействующего моментов (или соответственно сил перемещения и противодействия). Для реализации противодействия используют упругие элементы — пружины, растяжки, подвесы либо электромеханические устройства. При этом

$$M_{\text{пр}} = -k\alpha, \quad (4.3)$$

где  $k$  — удельный противодействующий момент, определяемый свойствами упругого элемента.

В механизмах логометрического типа противодействующий момент создается так же, как и вращающий. В этом случае угол поворота подвижной части зависит от отношения входной электрической величины и электрической величины, вызывающей торможение.

После включения ИМ в цепь и подачи измеряемого сигнала подвижная часть будет совершать затухающие колебания около положения равновесия и по истечении некоторого времени будет достигнуто установившееся отклонение. Чтобы увеличить затухание и уменьшить время успокоения, используют *успокоители* — воздушные, жидкостные или магнитоиндукционные, в которых кинетическая энергия поглощается из-за потерь на вязкое трение. Момент успокоения зависит от величины угловой скорости

$$M_{\text{усп}} = -P \frac{d\alpha}{dt}. \quad (4.4)$$

Рассмотрим устройство и принцип действия различных электромеханических преобразователей — измерительных механизмов.

#### **4.1.1. Электродинамический измерительный механизм**

Принцип действия электродинамического ИМ основан на взаимодействии магнитных потоков, созданных токами двух катушек (рис. 4.1):

— подвижной катушки 1, закрепленной на оси вращения с возвратными пружинами (см. рис. 4.1, слева вверху указано обозначение данного ИМ);

— неподвижной катушки 2, состоящей из двух частей, между которыми проходит ось подвижной катушки;

Катушка 1 подвижна и свободно вращается на оси внутри неподвижной катушки 2. Для подвода тока к подвижной катушке используются две спиральные пружины, которые одновременно служат для создания противодействующего момента движению катушки. На оси вращения закреплен указатель шкалы 3, снабженный успокоителем 4.

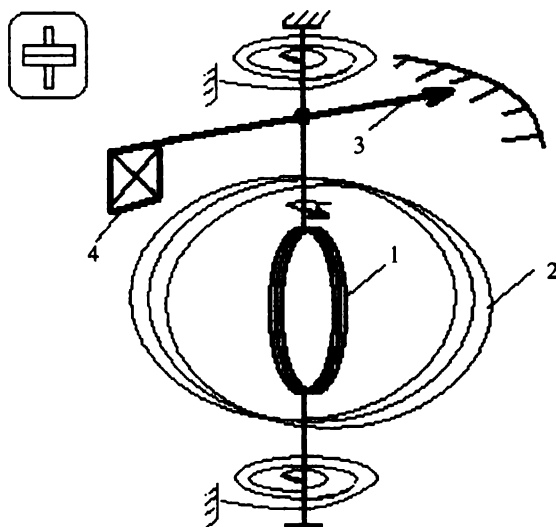


Рис. 4.1. Устройство электродинамического ИМ

1. При протекании в катушках постоянных токов  $I_1$  и  $I_2$  выражение для магнитной энергии имеет вид

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{1,2} I_1 I_2. \quad (4.5)$$

Вращающий момент определяется из уравнения (4.1) с учетом того, что индуктивности катушек  $L_1$  и  $L_2$  и токи в них не зависят от угла

$$M_{\text{вр}} = \frac{\partial W_{\text{м}}}{\partial \alpha} = I_1 I_2 \frac{\partial M_{1,2}}{\partial \alpha}. \quad (4.6)$$

Противодействующий момент определяется величиной угла закручивания и удельным моментом кручения  $k$  упругой системы.

После достижения равновесия угол отклонения определяется из условия равновесия моментов вращения и противодействия —  $M_{\text{вр}} = M_{\text{пр}}$ , откуда имеем

$$\alpha = \frac{1}{k} I_1 I_2 \frac{\partial M_{1,2}}{\partial \alpha} = \frac{I_2}{k} \left( \frac{\partial M_{1,2}}{\partial \alpha} \right) I_1. \quad (4.7)$$

Это и есть уравнение преобразования электродинамического измерительного механизма, где  $I_1$  — измеряемый сигнал (ток), а выражение перед  $I_1$  — это чувствительность, зависящая от тока питания  $I_2$  и характеристик, задаваемых конструкцией преобразователя. При этом конструктивно обеспечивается условие

$$\left( \frac{\partial M_{1,2}}{\partial \alpha} \right) = \text{const.}$$

2. Электродинамический ИМ можно использовать и на переменном токе. Пусть

$$i_1 = I_{1m} \sin \omega t; \quad i_2 = I_{2m} \sin(\omega t - \varphi), \quad (4.8)$$

где  $i_1$  и  $i_2$  — мгновенные значения синусоидальных токов в катушках 1 и 2 соответственно,  $\varphi$  — сдвиг фаз между ними. В этом случае вследствие инерции подвижной части она отклонится под действием среднего значения вращающего момента (4.6):

$$M_{\text{вп}}^{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T M_i dt = \frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 \frac{\partial M_{1,2}}{\partial \alpha} dt = \frac{\partial M_{1,2}}{\partial \alpha} I_1 I_2 \cos \varphi, \quad (4.9)$$

где  $T$  — период синусоидальных токов,  $I_1, I_2$  — действующие значения токов в катушках 1 и 2 соответственно. Выражение получено после подстановки  $i_1$  и  $i_2$  с использованием тригонометрических преобразований.

Из условия равновесия моментов вращения и противодействия  $M_{\text{вп}} = M_{\text{пр}}$  получаем уравнение преобразования электродинамического ИМ на переменном токе

$$\alpha = \frac{1}{k} \frac{\partial M_{1,2}}{\partial \alpha} I_1 I_2 \cos \varphi. \quad (4.10)$$

В заключение можно отметить следующее:

- отклонение подвижной части ИМ электродинамической системы обусловлено действием токов двух катушек, одна из которых неподвижна, другая — подвижна;
- возможность использования ИМ в цепях постоянного и в цепях переменного тока;
- измерительный механизм обладает перемножающим свойством двух величин (токов и напряжений);



— измерительный механизм, благодаря чувствительности к внешним магнитным полям, требует экранирования.

В зависимости от способа соединения катушек электродинамический ИМ может быть использован в качестве *амперметра*, *вольтметра* и *ваттметра* с классами точности 0,05—0,5. Этот механизм обладает низкой чувствительностью в цепях переменного тока, большим потреблением энергии ( $\sim 1$  Вт) и ограниченным частотным диапазоном до 1 кГц.

#### 4.1.2. Магнитоэлектрический измерительный механизм

В *магнитоэлектрическом механизме* вращающий момент возникает в результате взаимодействия тока в катушке и магнитного поля постоянного магнита.

Применяют ИМ с подвижной катушкой и подвижным постоянным магнитом. Основными элементами ИМ с подвижной катушкой являются постоянный магнит 1 (рис. 4.2), катушка или рамка на подвесе 2 с числом витков  $w$ , к которой ток  $I$  подводится через две спиральные пружины, одновременно создающие противодействующий момент.

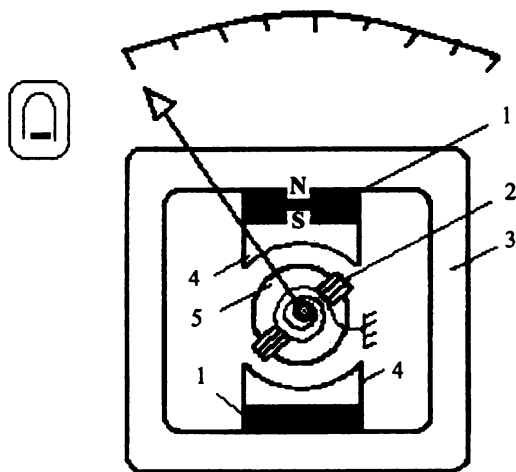


Рис. 4.2. Устройство магнитоэлектрического ИМ

За счет замыкания магнитного потока магнита магнитопроводом 3 в зазоре между полюсными наконечниками цилиндрической формы 4 и неподвижным цилиндрическим сердечником 5, охватываемом прямоугольной катушкой, существует радиальное равномерное магнитное поле. Таким образом, в любой точке зазора магнитная индукция постоянна и перпендикулярна вертикальным плечам катушки. При протекании тока через катушку возникает вращающий момент, в результате чего катушка и прикрепленный к ней указатель поворачиваются, а по шкале делается отсчет.

В данном случае вращающий момент есть результат взаимодействия тока в вертикальных плечах катушки с магнитным полем в рабочем зазоре, т. е. результат действия силы Ампера:

$$M_{\text{вр}} = 2F_A \frac{d}{2} = wBSI = \Psi_0 I, \quad (4.11)$$

где  $B$  — магнитная индукция поля магнита в рабочем зазоре,  $S$  — площадь подвижной катушки с числом витков  $w$  и током  $I$ ,  $\Psi_0$  — магнитное потокосцепление катушки, являющееся суммарной характеристикой ИМ.

С учетом противодействующего момента закручивания пружин уравнение преобразования приобретает следующий вид:

$$\alpha = \frac{BSw}{k} I. \quad (4.12)$$

Магнитоэлектрический ИМ обладает достаточно большим моментом инерции подвижной части и *может применяться только на постоянном токе*. Действительно, если подать в катушку переменный синусоидальный ток  $I = I_m \sin \omega t$ , то среднее значение вращающего момента за период тока будет равно нулю:

$$M_{\text{вр}}^{\text{ср}} = \frac{\Psi_0 I_m}{T} \int_0^T \sin \omega t dt = 0. \quad \text{Однако если магнитоэлектрический}$$

ИМ дополнить выпрямителем, то становится возможным его использование и *на переменном токе*.

Таким образом, магнитоэлектрический ИМ обладает большой чувствительностью, малым собственным потреблением мощности, благодаря сильному собственному полю мало подвержен

влиянию внешних магнитных полей, имеет прямо пропорциональную зависимость между углом отклонения и током в рамке. Применяется в амперметрах и вольтметрах.

#### 4.1.3. Электромагнитный измерительный механизм

Вращающий момент в электромагнитном ИМ возникает в результате взаимодействия ферромагнитного сердечника подвижной части механизма и магнитного поля плоской катушки с током. При протекании тока через катушку 2 сердечник 1 втягивается в нее (рис. 4.3).

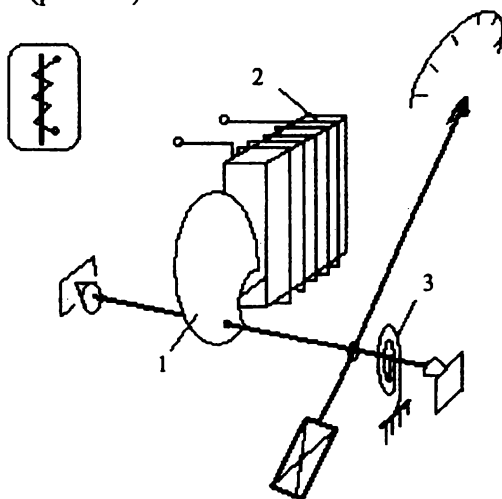


Рис. 4.3. Устройство электромагнитного ИМ

1. Магнитная энергия катушки с сердечником на *постоянном* токе:  $W_{\text{эм}} = \frac{1}{2} LI^2$ , где  $L$  — индуктивность катушки, зависящая от положения сердечника. Вращающий момент

$$M_{\text{вр}} = \frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} I^2 \left( \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right). \quad (4.13)$$

Противодействующий момент возникает из-за упругой пружины 3 с удельным моментом  $k$ . Тогда из условия равенства вращающего

и противодействующего моментов получаем уравнение преобразования ИМ

$$\alpha = \frac{1}{2k} I^2 \frac{\partial L}{\partial \alpha}. \quad (4.14)$$

Видно, что зависимость угла поворота подвижной части от силы тока нелинейная. Линейную зависимость от тока получают, изготавливая сердечник специальной формы, для которого  $\frac{\partial L}{\partial \alpha}$  является требуемой функцией угла  $\alpha$ .

2. Если через катушку протекает *переменный синусоидальный ток*  $I = I_m \sin \omega t$ , мгновенное значение вращающего момента

$$M'_{\text{вр}} = \frac{\partial W_{\text{зм}}}{\partial \alpha} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right) I_m^2 (1 - \cos 2\omega t). \quad (4.15)$$

Отсюда видно, что момент содержит и постоянную, и гармоническую составляющую. Отклонение может определяться средним значением момента, в который может давать вклад только постоянная составляющая, так как при интегрировании за период (для нахождения среднего момента) переменная составляющая даст нуль. Для среднего значения момента вращения имеем

$$M_{\text{вр}}^{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T M'_{\text{вр}} dt = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \alpha} \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \alpha} I_d^2, \quad (4.16)$$

где  $I_d$  — действующее значение тока. Следовательно, уравнение на переменном токе имеет тот же вид, что и на постоянном, но теперь фигурирует действующее значение тока в катушке.

#### 4.1.4. Электростатический измерительный механизм

Вращающий момент в *электростатических механизмах* возникает в результате взаимодействия двух систем заряженных проводников, одна из которых является подвижной.

Подвижный легкий электрод из алюминиевых пластин 1 (рис. 4.4), укрепленных на оси вращения, может перемещаться внутри алюминиевых неподвижных камер 2. Между подвижными

и неподвижными электродами включают электрическое напряжение, под действием которого подвижный электрод втягивается внутрь неподвижной камеры.

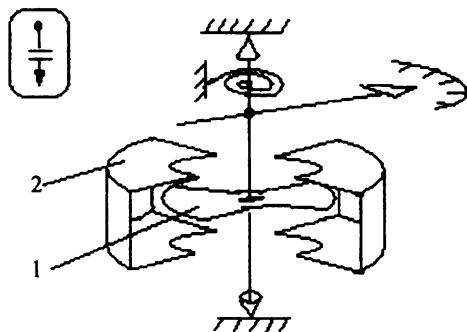


Рис. 4.4. Устройство электростатического ИМ

Электрическая энергия конденсатора известна, тогда для вращающего момента имеем

$$M_{\text{вп}} = \frac{\partial W_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial C}{\partial \alpha} \right) U^2. \quad (4.17)$$

1. Для постоянного напряжения между электродами установившийся угол поворота с учетом уравнивания подвеса противодействующим моментом имеет вид

$$\alpha = \frac{1}{2k} \frac{\partial C}{\partial \alpha} U^2. \quad (4.18)$$

2. Для переменного напряжения синусоидальной формы  $u = U_m \sin \omega t$  по аналогии с только что рассмотренным выше случаем для среднего значения вращающего момента имеем

$$M_{\text{вп}}^{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T M'_{\text{вп}} dt = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial \alpha} \frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial \alpha} U_d^2. \quad (4.19)$$

И уравнение преобразования имеет тот же вид, что и на постоянном токе, с заменой постоянного напряжения  $U$  на действующее значение  $U_d$ . Видно, что

— угол поворота электростатического механизма от измеряемого напряжения зависит нелинейно; линейную зависимость

получают путем изготовления пластин специальной формы, при которой  $\frac{\partial C}{\partial \alpha}$  является требуемой функцией от угла  $\alpha$ ;

— электростатический механизм имеет малое собственное потребление мощности от измеряемой цепи (на постоянном токе равное нулю);

— на результат измерения малое влияние оказывают температура окружающей среды, частота и форма измеряемого напряжения;

— отсутствует влияние магнитных полей, но влияют внешние электростатические поля, для защиты от которых используют металлические экраны.

## 4.2. Электрические масштабные преобразователи

Измерительные преобразователи, предназначенные для изменения размера величины в заданное число раз, называют *масштабными измерительными преобразователями*. К ним относят добавочные резисторы, шунты, делители напряжения, измерительные усилители, измерительные трансформаторы тока и напряжения.

### 4.2.1. Добавочные резисторы

Резистор, включенный последовательно с ИМ, вращающий момент которого зависит от тока, и используемый для измерения напряжения, называется *добавочным резистором*.

Добавочный резистор можно рассматривать в качестве преобразователя напряжения в ток, т. е. измеряемого напряжения в ток через измерительный механизм. Если ИМ, например магнитоэлектрический, с собственным сопротивлением  $R_0$  использовать для измерения напряжения, то включение  $R_d$  (рис. 4.5) необходимо. Включение  $R_d$  уменьшает ток через ИМ, и шкала ИМ может быть градуирована в единицах напряжения.

Уравнением преобразования в данном случае является закон Ома для участка цепи:

$$I_0 = \frac{1}{R_0 + R_D} U_x. \quad (4.20)$$

Поскольку включение  $R_D$  уменьшает ток через ИМ и, соответственно, отклонение подвижной части, то добавочные резисторы используют в вольтметрах для расширения пределов измерения по напряжению (рис. 4.6).

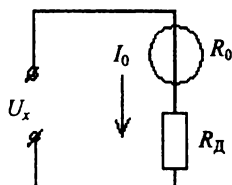


Рис. 4.5. Схема включения добавочного резистора

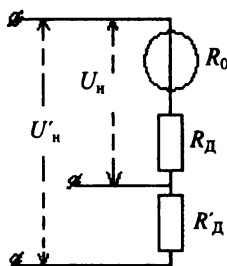


Рис. 4.6. Схема, иллюстрирующая расширение пределов измерения вольтметра с помощью добавочного резистора

Действительно, пусть вольтметр сопротивлением  $R_B = R_0 + R_D$  рассчитан на измерение номинального значения напряжения  $U_n$ , когда через его ИМ протекает максимальный ток  $I_0$ . При включении добавочного резистора  $R'_D$  по схеме рис. 4.6 тем же вольтметром можно измерять напряжение  $U'_n > U_n$ , сохраняя ограничение максимального тока через ИМ в пределах допустимого  $I_0$ . Условие равенства токов  $I_0 = I'_0$  позволяет определить так называемый множитель шкалы:

$$\frac{U_n}{R_B} = \frac{U'_n}{R_B + R'_D} \Rightarrow R'_D = R_B(n - 1), \quad (4.21)$$

где  $n = \frac{U'_n}{U_n}$  есть множитель шкалы. Многопредельные вольтметры содержат соответствующее пределам количество добавочных

резисторов, требования к которым по классу точности и номинальному току регламентируются государственным стандартом.

### 4.2.2. Шунты

Резистор, включенный параллельно с ИМ, вращающий момент которого зависит от тока, называется *шунтом*.

Внешний шунт — это 4-зажимный резистор с сопротивлением  $R_{\text{ш}}$ , который с помощью токовых зажимов Т включается в цепь измеряемого тока  $I_x$ , а ИМ сопротивлением  $R_0$  подключается к его потенциальным зажимам П (рис. 4.7).

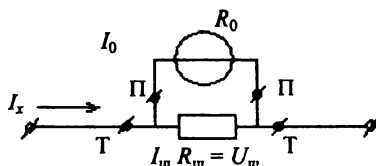


Рис. 4.7. Схема включения шунта

Шунт преобразует ток в падение напряжения. Для постоянного тока уравнение преобразования шунта

$$U_{\text{ш}} = R_{\text{ш}} I_{\text{ш}}. \quad (4.22)$$

Шунт можно рассматривать и как *делитель тока* с коэффициентом деления (шунтирования)

$$n = \frac{I_x}{I_0} = \frac{R_0 + R_{\text{ш}}}{R_{\text{ш}}}. \quad (4.23)$$

Это выражение получается с использованием равенства падений напряжения  $I_{\text{ш}} R_{\text{ш}} = I_0 R_0$  и равенства  $I_x$  сумме разветвленных токов  $I_x = I_{\text{ш}} + I_0$ .

Таким образом, шунт может служить для расширения пределов измерения амперметров по току, т. е. позволяет измерять токи, превосходящие те, на которые рассчитан собственно ИМ. Чем меньше сопротивление шунта, тем большее значение тока может быть измерено (рис. 4.8).



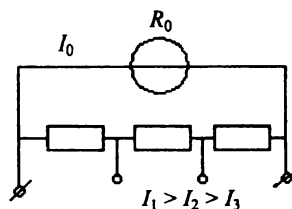


Рис. 4.8. Схема, иллюстрирующая расширение пределов измерения амперметра с помощью шунта

В многопредельных амперметрах используют ступенчатые шунты, а изменение пределов по току осуществляется переключением зажимов шунта.

#### 4.2.3. Делители напряжения

*Делители напряжения* предназначены для получения определенного соотношения между входным напряжением  $U_1$  и выходным напряжением  $U_2$  при  $U_2 < U_1$ .

Делители напряжения выполняются на резисторах, конденсаторах, индукторах. На рис. 4.9 представлен простейший *резисторный делитель*.

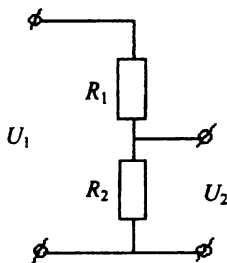


Рис. 4.9. Схема, иллюстрирующая деление напряжения с помощью резисторов

Если выход делителя *не нагружен (холостой ход)*, то коэффициент преобразования на постоянном токе имеет вид

$$S = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}. \quad (4.24)$$

Используется также параметр  $1/S$ , который называют коэффициентом деления.

Если делитель *нагружен сопротивлением*  $R_n$ , то выражение для коэффициента преобразования принимает вид

$$S_n = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \left( 1 + \frac{R_2}{R_n} \right)}. \quad (4.25)$$

Разновидностью делителей напряжения являются *реохорды*, позволяющие плавно регулировать коэффициент преобразования за счет скользящего контакта.

*На переменном токе* в общем случае коэффициент преобразования является комплексной величиной, и его выражение имеет вид

$$\dot{S} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}, \quad (4.26)$$

где  $Z_1, Z_2$  — полные сопротивления соответствующих участков делителя. Кроме того, на переменном токе между напряжениями  $U_1$  и  $U_2$  появляется угол сдвига, который является *угловой погрешностью делителя*.

На переменном токе для деления напряжения используют также конденсаторные и индукторные делители.

Простейший *конденсаторный делитель* состоит из двух конденсаторов  $C_1, C_2$  с соответствующими сопротивлениями изоляции  $R_1$  и  $R_2$ , которые также участвуют в формировании выходного напряжения делителя (рис. 4.10).

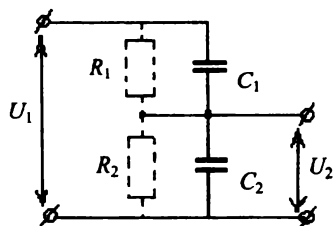


Рис. 4.10. Схема, иллюстрирующая деление напряжения с помощью конденсаторов

Коэффициент преобразования, исходя из общего выражения для чувствительности делителя на переменном токе (4.26), равен

$$S_C = \frac{C_1 \left( 1 + \frac{1}{j\omega C_1 R_1} \right)}{C_1 \left( 1 + \frac{1}{j\omega C_1 R_1} \right) + C_2 \left( 1 + \frac{1}{j\omega C_2 R_2} \right)}. \quad (4.27)$$

Видно, что в общем случае  $S_C$  зависит от частоты тока. Однако в пределе высоких частот  $S_C$  зависит только от величин емкостей

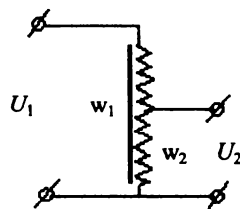
$$S_C = \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \quad (4.28)$$

а в пределе низких частот — только от величин активных сопротивлений

$$S_R = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (4.29)$$

На рис. 4.11 представлена схема индукторного делителя напряжения.

Рис. 4.11. Схема, иллюстрирующая деление напряжения с помощью катушек индуктивности



Здесь  $w_1$  — общее число витков, на которое подается входное напряжение;  $w_2$  — число витков на участке, с которого снимается выходное напряжение; входная и выходная цепи индуктивно связаны между собой.

В случае малых потоков рассеяния, т. е. при замкнутой магнитной цепи сердечника и его высокой магнитной проницаемости, работа преобразователя такая же, как и в случае идеального трансформатора. Коэффициент преобразователя при этом

$$S = \frac{w_2}{w_1}.$$

Применяют также ступенчатые делители, когда напряжение с витковой секции вновь подается на индукторный делитель, а с него — уже на нагрузку. Существенным достоинством индукторных делителей является сравнительно небольшая зависимость коэффициента деления от нагрузки.

#### 4.2.4. Измерительные усилители

Для расширения пределов измерения в сторону малых сигналов применяют *измерительные усилители*.

По диапазону частот усиливаемых сигналов измерительные усилители делятся:

- на *низкочастотные* (20 Гц — 200 кГц);
- *высокочастотные* (до 250 МГц);
- *селективные*, которые усиливают сигналы в узкой полосе частот.

Наибольшее применение находят электронные усилители, которые по назначению можно разделить на три группы:

1. *Масштабные*, или собственно измерительные усилители, предназначенные для увеличения с определенной точностью значения входной величины. Основное требование к ним заключается в обеспечении линейности уравнения преобразования и стабильности коэффициента преобразования.

2. *Усилители указателей равновесия*, служащие для обнаружения весьма малых напряжений и токов. Они должны иметь большой коэффициент усиления, малый порог чувствительности, обладать большой стабильностью нуля, а часто и частотной избирательностью.

3. *Усилители на операционных усилителях*, предназначенные для выполнения математических операций интегрирования или дифференцирования с входной величиной.

Измерительные усилители позволяют измерять сигналы от 0,1 мВ и 0,3 мкА с нормированной погрешностью 0,1—1 %.

Для измерения меньших постоянных токов и напряжений используют *фотогальванометрические усилители*.

Для усиления токов и напряжений от источников с большим внутренним сопротивлением используют *электрометрические усилители с большим входным сопротивлением* (до  $10^{12}$  Ом).

Выпускаемые промышленностью измерительные усилители имеют унифицированный номинальный выходной сигнал 10 В по напряжению и 5 мА по току.

#### 4.2.5. Измерительные трансформаторы переменного тока и напряжения

*Измерительные трансформаторы* тока и напряжения применяют в качестве преобразователей больших переменных токов и напряжений в относительно малые величины, измерение которых возможно стандартными приборами с относительно небольшими пределами измерений.

Измерительные трансформаторы состоят из двух изолированных друг от друга и размещенных на магнитопроводе обмоток: первичной, с числом витков  $w_1$ , и вторичной —  $w_2$ . Трансформаторы тока и трансформаторы напряжения различным образом включаются в измеряемую цепь, первые — последовательно, вторые — параллельно с нагрузкой (рис. 4.12).

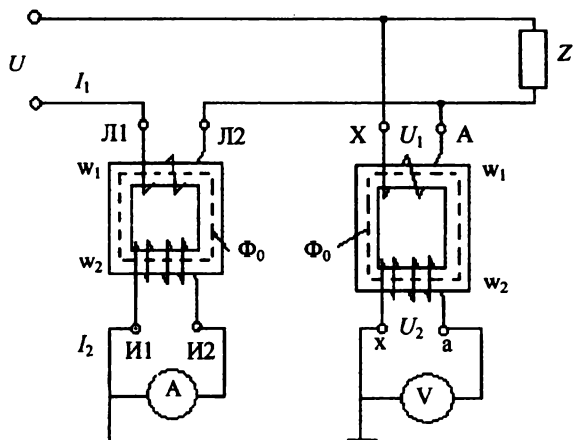


Рис. 4.12. Схема включения трансформаторов тока и напряжения

При этом измерительные приборы включают во вторичные цепи трансформаторов, а сами вторичные цепи заземляют. Для правильного включения трансформаторов и приборов зажимы трансформаторов маркируют, как показано на рис. 4.12. Л1, И1

и Л2, И2 — начало и конец, соответственно, первичной и вторичной обмоток трансформатора тока. А, Х и а, х — соответственно начало и конец первичной и вторичной обмоток трансформатора напряжения.

В трансформаторах тока первичный ток  $I_1$  больше вторичного  $I_2$ , поэтому  $w_1 < w_2$ . При токах  $I_1$  больше 500 А первичная обмотка может состоять из одного провода — шины, проходящего через окно магнитопровода.

В трансформаторах напряжения первичное напряжение  $U_1$  больше вторичного  $U_2$ , поэтому  $w_1 > w_2$ . Вторичное напряжение у стандартных трансформаторов составляет ~100 В при различных значениях первичного напряжения.

По показаниям приборов, включаемых во вторичные обмотки трансформаторов, определяют значения измеряемых в первичных цепях величин. Для этого их умножают на *номинальные коэффициенты преобразования*, или трансформации. Для трансформатора тока  $K_I = \frac{I_1}{I_2}$ , для трансформатора напряжения  $K_U = \frac{U_1}{U_2}$ .

В общем случае *действительные коэффициенты трансформации* зависят от величины измеряемых токов и напряжений, характера и значения нагрузки во вторичной цепи, частоты тока, материала сердечника и конструкции трансформатора. Однако на практике используют постоянные номинальные коэффициенты трансформации, определяемые только соотношением витков

$$K_{\text{ном}} = w_2/w_1. \quad (4.30)$$

При этом возникают *методические погрешности* измерений. Для трансформатора тока *токовая погрешность*

$$\gamma_I = \frac{I'_1 - I_1}{I_1} 100 \% = \frac{K_{I\text{ном}} - K_I}{K_I} 100 \%, \quad (4.31)$$

где  $I'_1 = K_{I\text{ном}} I_2$  — измеряемый ток, посчитанный по номинальному коэффициенту, а  $I_1 = K_I I_2$  — по действительному коэффициенту.

Для трансформаторов напряжения *погрешность напряжения*

$$\gamma_U = \frac{U'_1 - U_1}{U_1} 100 \% = \frac{K_{U\text{ном}} - K_U}{K_U} 100 \%. \quad (4.32)$$

У измерительных трансформаторов имеется также *угловая погрешность*, поскольку фаза первичной величины неточно передается вторичной величине.

**Векторная диаграмма трансформатора тока.** Трансформатор тока работает в режиме, близком к короткому замыканию, так как в его первичную обмотку включен прибор с малым сопротивлением — амперметр. Для рассмотрения работы трансформатора тока принято строить его векторную диаграмму:

— полагая ток, напряжение, сопротивление комплексными величинами, чтобы учесть фазовые сдвиги между токами и напряжениями;

— используя векторное представление комплексных чисел на плоскости, при этом комплексной величине сопоставляется вектор, компонентами которого являются реальная часть комплексного числа (проекция на ось абсцисс) и его мнимая часть (проекция на ось ординат).

Рассмотрим сопротивление вторичной цепи трансформатора и через  $Z_n$  обозначим суммарное комплексное сопротивление приборов и проводов вторичной цепи за исключением сопротивления собственно обмотки  $w_2$ , для которой сопротивление  $Z_n$  является нагрузкой.

$Z_n = R_n + jX_n$  — комплексное сопротивление нагрузки для вторичной обмотки трансформатора,  $R_n$  — активная,  $X_n$  — реактивная составляющие этого сопротивления.

$Z_2 = R_2 + jX_2$  — комплексное сопротивление собственно вторичной обмотки  $w_2$ .

При протекании тока  $I_2$  во вторичной обмотке возникнут падения напряжения на сопротивлениях  $Z_n$  и  $Z_2$ :

$$\dot{U}_n = R_n \dot{I}_2 + jX_n \dot{I}_2,$$

$$\dot{U}_2 = R_2 \dot{I}_2 + jX_2 \dot{I}_2,$$

где  $R_n \dot{I}_2$  и  $R_2 \dot{I}_2$  — падения напряжения на активных сопротивлениях нагрузки и самой вторичной обмотки. Эти напряжения *синфазны* с вектором тока  $\dot{I}_2$ .

$X_n \dot{I}_2$  и  $X_2 \dot{I}_2$  — падения напряжения на реактивных сопротивлениях нагрузки обмотки и самой обмотки  $w_2$ , которые

ЭДС во вторичной обмотке трансформатора — вектор  $\dot{E}_2$  — как раз равен сумме падений напряжения  $\dot{U}_H$  и  $\dot{U}_2$ :  $\dot{E}_2 = \dot{U}_H + \dot{U}_2$ .

Отложим на диаграмме также падение напряжения  $R_n \dot{I}_2$  на активном сопротивлении нагрузки вдоль вектора тока, поскольку они совпадают по фазе, и  $X_n \dot{I}_2$ , под  $90^\circ$  по часовой стрелке, поскольку реактивная составляющая опережает ток на  $90^\circ$ . В сумме оба вектора дают вектор  $\dot{U}_n$  — падение напряжения на нагрузке вторичной обмотки трансформатора.



Отложим также вектор  $\dot{U}_2$  — падение напряжения на полном сопротивлении собственно обмотки, который в сумме с  $\dot{U}_н$  дает вектор  $\dot{E}_2$ .

Магнитный поток в магнитопроводе  $\dot{\Phi}_0$ , наводящий ЭДС во вторичной обмотке, как известно из работы трансформатора, на  $\pi/2$  опережает по фазе ЭДС  $\dot{E}_2$ .

Отложим на диаграмме вектор магнитного потока  $\dot{\Phi}_0$ . Магнитный поток в сердечнике  $\dot{\Phi}_0$  создается МДС  $\dot{I}_0 w_1$ , которая является векторной суммой двух МДС, действующих в сердечнике и связанных с протеканием токов в обмотках  $w_1$  и  $w_2$ :

$$w_1 \dot{I}_1 + w_2 \dot{I}_2 = w_1 \dot{I}_0. \quad (4.33)$$

откуда

$$w_1 \dot{I}_1 = -w_2 \dot{I}_2 + w_1 \dot{I}_0. \quad (4.34)$$

МДС  $\dot{I}_2 w_2$  оказывает размагничивающее действие на сердечник, так как индукционный ток  $\dot{I}_2$  сдвинут по фазе по отношению к  $\dot{I}_1$  почти на  $180^\circ$  («—» в законе ЭМИ).

Вектор МДС  $\dot{I}_0 w_1$  не совпадает по фазе с созданным им потоком  $\dot{\Phi}_0$ . Отставание потока на угол  $\delta$  обусловлено наличием гистерезиса и вихревых токов в сердечнике (или, другими словами, потерями в сердечнике).

Видно, что токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  не совпадают по фазе на угол  $\delta$ , который определяет угловую погрешность преобразования.

Таким образом, вектор МДС  $\dot{I}_1 w_1$  образуется суммированием векторов  $-\dot{I}_2 w_2$  и  $\dot{I}_0 w_1$ . Отложим эти векторы и их сумму на диаграмме (рис. 4.13).

Основываясь на построенной таким образом диаграмме, определим действительный коэффициент преобразования трансформатора тока. Из  $\triangle OBC$  имеем

$$I_1 w_1 = \frac{OB}{\cos \delta_1} = \frac{I_2 w_2 + I_0 w_1 \cos(\varphi_0 - \psi_2)}{\cos \delta_1}, \quad (4.35)$$

где  $\varphi_0$  — угол между векторами  $\dot{I}_0 w_1$  и  $\dot{I}_s w_1$ ;  $\psi_2$  — угол между векторами  $-\dot{I}_2 w_2$  и  $-\dot{E}_2$ . Полагая, что угол  $\delta_1$  мал и его косинус близок к 1, получим

$$I_1 = \frac{w_2}{w_1} I_2 + I_0 \cos(\varphi_0 - \psi_2). \quad (4.36)$$

Итак, действительный коэффициент трансформации

$$K_1 = \frac{I_1}{I_2} = \frac{w_2}{w_1} + \frac{I_0}{I_2} \cos(\varphi_0 - \psi_2) \quad (4.37)$$

отличается от номинального, что и обуславливает токовую погрешность трансформатора тока:

$$\gamma_1 = \frac{K_{\text{ном}} - K_1}{K_1} 100 \% = \frac{I_0 w_1}{I_2 w_2} \cos(\varphi_0 - \psi_2) 100 \%. \quad (4.38)$$

Из  $\triangle OBC$  и  $\triangle ABC$  для угловой погрешности получим

$$\operatorname{tg} \delta_I \approx \delta_I = \frac{BC}{OB} = \frac{I_0 w_1 \sin(\varphi_0 - \psi_2)}{I_2 w_2 + I_0 w_1 \cos(\varphi_0 - \psi_2)}. \quad (4.39)$$

Второе слагаемое в знаменателе мало в силу  $I_0 \ll I_2$ ,  $w_1 < w_2$  и  $\cos(\varphi_0 - \psi_2) < 1$ , им можно пренебречь, и тогда угловая погрешность, выраженная в радианах, принимает вид

$$\delta_I = \frac{I_0 w_1 \sin(\varphi_0 - \psi_2)}{I_2 w_2}. \quad (4.40)$$

Из анализа полученных уравнений можно сделать следующие выводы:

1. При возрастании сопротивления вторичной обмотки или ее разрыве ( $I_2 = 0$ ) происходит возрастание МДС  $\dot{I}_0 w_1$  до  $\dot{I}_1 w_1$ , это в свою очередь вызывает резкое увеличение потока  $\Phi_0$ , сопровождающееся:

- а) ростом потерь в сердечнике и его перегревом;
- б) ростом ЭДС  $E_2$ , что может вызвать ситуацию пробоя.

При номинальном режиме работы МДС  $\dot{I}_0 w_1$  составляет ~1 % от МДС  $\dot{I}_1 w_1$  (или  $\dot{I}_2 w_2$ ).

2. Увеличение сопротивления нагрузки вторичной цепи, например, за счет включения большого числа приборов, приводит к росту  $I_0$  и тем самым к росту токовой и угловой погрешностей.  $I_0$  будет тем меньше, чем выше магнитная проницаемость сердечника и чем меньше магнитные потери, а также при уменьшении индукции до  $\sim 0,05\text{—}0,15$  Тл.

3. Увеличение индуктивного сопротивления нагрузки приводит к увеличению угла  $\psi_2$  и, следовательно, к увеличению токовой погрешности (растет значение косинуса) и уменьшению угловой погрешности (значение синуса уменьшается).

### 4.3. Измерительные преобразователи рода тока

#### 4.3.1. Термоэлектрические преобразователи

*Термоэлектрические преобразователи* предназначены для измерения действующего значения переменного тока посредством преобразования его в тепло с повышением рабочей температуры (первая ступень преобразования), а затем преобразования температуры в термоЭДС (вторая ступень).

Преобразование переменного тока в тепло осуществляется с помощью нагревателя (металлической проволоки), по которому протекает измеряемый ток. Количество тепла, выделяющегося в нагревателе за период тока  $\tau$ ,

$$Q_n = R_n \int_0^{\tau} i^2 dt, \quad (4.41)$$

где  $Q_n$  — количество выделяющегося тепла,  $R_n$  — сопротивление нагревателя. Вследствие тепловой инерции нагревателя устанавливается температура, которая определяется не только тепловыделением, но и теплоотводом. Количество тепла, отводимое за время  $\tau$ ,

$$Q_{отв} = cA\Delta T\tau, \quad (4.42)$$

где  $c$  — коэффициент теплоотдачи,  $A$  — площадь поверхности охлаждения нагревателя,  $\Delta T$  — разность температур нагревателя

и окружающей среды. Из условия установившегося теплового равновесия  $Q_n = Q_{отв}$  получаем

$$\Delta T = \frac{R_n}{cA} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} i^2 dt = \frac{R_n}{cA} I_{x,d}^2, \quad (4.43)$$

где  $I_{x,d}$  — действующее значение переменного тока, текущего через нагреватель.

Преобразование температуры, установившейся при тепловыделении, в термоЭДС производится термопарой.

Если соединить два разнородных проводника (термоэлектроды) с помощью сварки, а два других оставить свободными, то получим устройство называемое *термопарой*. При помещении рабочего спая в зону с температурой  $T_1$ , большей  $T_2$ , при которой находятся свободные концы, в цепи возникает ЭДС, являющаяся функцией  $T_1$  и  $T_2$ :  $E_T = f(T_1) - f(T_2)$ .

Если  $T_2$  поддерживать постоянной, то ЭДС оказывается пропорциональной  $T_1$  и появляется возможность ее измерения:

$$E_T = f_1(T_1).$$

Наиболее часто используют термопары медь — константан, хромель — копель, хромель — алюмель, платина — платинародий.

Необходимо, чтобы материалы термопар обеспечивали однозначность зависимости термоЭДС от температуры, постоянство термоэлектрических свойств, химическую и механическую стойкость при повышенных температурах, хорошую электропроводность, возможно большую ЭДС.

Если поместить термопару в зону тепловыделения нагревателя и предположить линейность преобразования термопары  $E_T = k\Delta T$ , то получаем

$$E_T = k \frac{R_n}{cA} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} i^2 dt = k \frac{R_n}{cA} I_{x,d}^2 = k' I_{x,d}^2. \quad (4.44)$$

Таким образом, термоэлектрический преобразователь (рис. 4.14), по существу, состоит из двух термопреобразователей, составляющих единое целое. Его уравнение преобразования

$$E_T = k' I_{x,d}^2, \quad (4.45)$$

т. е. показания термоэлектрического преобразователя пропорциональны квадрату действующего значения измеряемого тока.

Теплота, выделяемая током в нагревателе в широких пределах, не зависит от частоты, поэтому термоэлектрические преобразователи можно использовать и на постоянном и на переменном токе, включая радиочастоты. С повышением частоты до 5—10 МГц погрешность преобразователя возрастает, что обусловлено вкладом поверхностного эффекта в сопротивление нагревателя и отклонения части измеряемого тока через паразитные емкости помимо нагревателя.

Основным достоинством термоэлектрических преобразователей является высокая точность измерений в расширенном диапазоне частот и при искаженной форме измеряемого тока или напряжения. К недостаткам следует отнести зависимость показаний от температуры окружающей среды, значительное собственное потребление мощности, чувствительность к перегрузкам и малый срок службы.

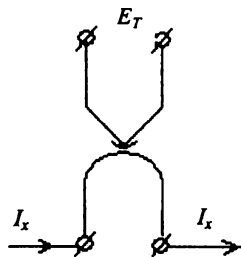


Рис. 4.14. Схема термоэлектрического преобразователя

### 4.3.2. Измерительные выпрямители

*Измерительными выпрямителями* называют преобразователи переменного тока в постоянный, используемые для измерения среднего, действующего или максимального значения входного переменного тока.

В измерительных выпрямителях применяется одно- и двухполупериодное выпрямление, выполненное с использованием полупроводниковых диодов.

Измерительные выпрямители подразделяют на неуправляемые и управляемые, или фазочувствительные.

**Неуправляемые измерительные выпрямители среднего значения с двумя диодами** (рис. 4.15 а). Собственно измерительным выпрямителем является сочетание диода VD1 и измерительного механизма (ИМ). Однако для сохранения режима переменного тока в цепи включают еще один диод VD2 (если бы диод

был один, то во всей цепи протекал бы не синусоидальный, а пульсирующий ток). Для идентичности обеих полуволн необходимо, чтобы  $R = R_{ИМ}$ . При этом, как видно из приведенной схемы и диаграммы (рис. 4.15), через ИМ будет протекать только одна

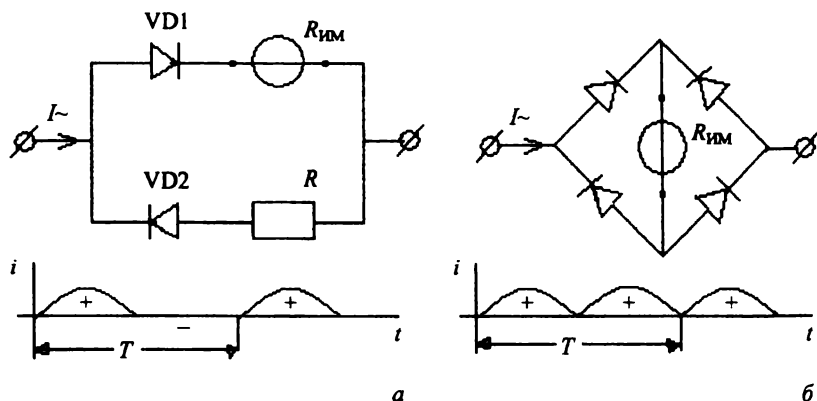


Рис. 4.15. Неуправляемые однополупериодные (а) и двухполупериодные (б) измерительные выпрямители

полуволна (с «+») выпрямленного тока. Поэтому при протекании тока через ИМ с чувствительностью  $S$  для отклонения подвижной части получим

$$\alpha = S \left( \frac{1}{T} \int_0^T i dt \right) = S \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt \right) = S \frac{I_{cp}}{2} = S' I_{cp}. \quad (4.46)$$

Таким образом, данный измерительный выпрямитель позволяет измерять среднее значение переменного тока.

Отметим, что данный преобразователь можно использовать и для измерения среднего значения напряжения  $U_{cp}$ . Для этого последовательно с VD1 вместо ИМ включают нагрузочное сопротивление, с которого соответствующим измерителем и снимают падение напряжения. Тогда отклонение измерителя будет пропорционально среднему значению напряжения питания цепи. Если режим тока в цепи неважен, то вторая часть цепи вообще может быть опущена.

При использовании схемы двухполупериодного выпрямления (рис. 4.15 б) выпрямленный ток проходит через ИМ в одном направлении в обе половины периода и чувствительность данной схемы оказывается в два раза выше, чем однополупериодной:

$$\alpha = S \left( \frac{1}{T} \int_0^T i dt \right) = SI_{cp} = 2S'I_{cp}. \quad (4.47)$$

Таким образом, двухполупериодный измерительный выпрямитель позволяет измерять среднее значение переменного тока, но так же, как и однополупериодный, может быть использован и для измерения  $U_{cp}$ .

Погрешности неуправляемых выпрямительных преобразователей среднего значения связаны с нелинейностью вольт-амперной характеристики диодов, а также с зависимостью коэффициента выпрямления от температуры (за счет изменения прямого и обратного сопротивления диодов) и частоты (диоды обладают собственной емкостью, которая шунтирует сопротивление диода).

В цепях переменного тока обычно требуется измерение действующих значений тока и напряжения. При использовании данных преобразователей для этих целей показывающий прибор может быть проградуирован в действующих значениях, поскольку для синусоидальной формы кривой  $I = k_{\phi} I_{cp} = 1,11 I_{cp}$  (то же для напряжения). Если же в цепи форма сигнала отличается от синусоидальной, то при измерении возникает дополнительная погрешность, которая может быть оценена по следующей формуле:

$$\gamma = \left( \frac{1,11 - k_{\phi}}{k_{\phi}} \right) 100 \%, \quad (4.48)$$

где  $k_{\phi}$  — коэффициент формы реальной кривой.

**Измерительные выпрямители максимального значения.** При положительной полуволне  $U_x$  конденсатор  $C$  заряжается до значения напряжения  $U_C$ , соответствующего точке «а», близкого к значению  $U_m$  (рис. 4.16). Затем конденсатор начнет разряжаться через  $R_n$  до момента пока  $U_x$  не станет больше  $U_C$  (точка «б»), в это время через диод пойдет ток  $i_d$  и снова зарядит конденсатор до напряжения, близкого к  $U_m$  (до тех пор, пока  $U_x$  не превзойдет  $U_C$ , ток через диод течь не будет).

Таким образом, если постоянная времени  $R_n C \gg T$ , где  $T$  — период напряжения  $U_x$ , то на  $R_n$  всегда будет напряжение  $U_- \sim U_m$ . И данный выпрямитель можно использовать для измерения максимального значения переменного напряжения.

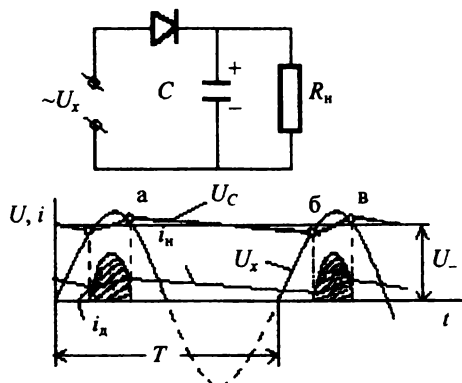


Рис. 4.16. Принципиальная схема выпрямителя максимального значения и временная диаграмма его работы

Если в цепи форма сигнала отличается от синусоидальной, то при измерении максимального значения возникает *дополнительная погрешность*, которая может быть оценена по следующей формуле:

$$\gamma = \left( \frac{1,41 - k_a}{k_a} \right) 100 \%, \quad (4.49)$$

где 1,41 — амплитудный коэффициент для синусоидальной формы кривой,  $k_a$  — амплитудный коэффициент реальной кривой.

**Управляемые измерительные выпрямители** имеют два входа: один — для измеряемого напряжения  $U_x$ , второй — для управляющего напряжения  $U_y$  (рис. 4.17). Оба напряжения должны быть синусоидальной формы и одной частоты. Среднее значение выпрямленного тока на выходе зависит не только от  $U_x$ , но и от угла сдвига фаз между напряжениями  $U_x$  и  $U_y$ . Используют электромеханические и полупроводниковые управляемые выпрямители. Электромеханические выпрямители практически уже



не используются, однако их рассмотрение с целью демонстрации принципа работы управляемых выпрямителей представляется оправданным.

Электромеханический выпрямитель может замыкать контакт «А» цепи измеряемого напряжения  $U_x$  на время, равное половине периода управляющего напряжения  $U_y$  с помощью стальной пружины 1, управляемой электромагнитом (рис. 4.17 а). Пока в течение  $T/2$  положительного полупериода пружина притянута к полюсу электромагнита, через сопротивление  $R_n$  цепи  $U_x$  течет ток. Во вторую половину периода полярность  $U_y$  меняется, контакт «А» размыкается, и ток не течет. Напряжение  $U_y$  подается в обмотку электромагнита 3 через фазовращатель 4.

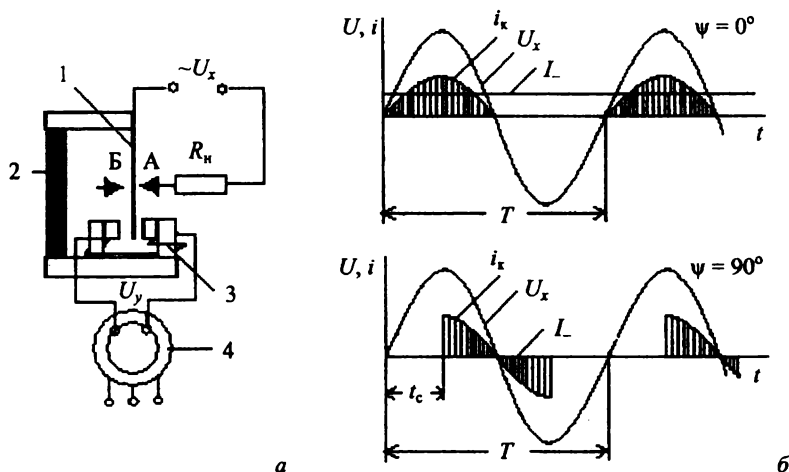


Рис. 4.17. Электромеханический управляемый измерительный выпрямитель (а) и диаграмма его работы (б)

При совпадении фаз обоих напряжений  $\psi = 0^\circ$  (см. рис. 4.17 б). В этом случае через  $R_n$  протекает однополупериодный выпрямленный ток. Постоянная составляющая этого тока имеет максимально возможное значение и равна

$$I_- = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \psi t dt \right) = \frac{1}{2} I_{cp}. \quad (4.50)$$

Если с помощью фазовращателя изменить фазу управляющего напряжения  $U_y$ , например, ввести отставание от  $U_x$  на угол  $\psi$ , то момент времени замыкания контакта «А» наступит с опозданием, и в течение полупериода полярность тока, протекающего через резистор, будет меняться, оказывая влияние на величину среднего значения тока.

При  $\psi = 90^\circ$  в течение четверти периода будет протекать ток положительной полярности, а в следующую четверть — такой же ток отрицательной полярности, так что среднее значение тока, или его постоянная составляющая за половину периода, окажется равным нулю:  $I_- = 0$ .

При произвольном значении  $\psi$  с учетом того, что  $\omega t_c = \psi$ , средняя величина тока определяется как

$$I_- = \frac{1}{T} \int_{t_c}^{t_c+T/2} i dt = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} \int_{t_c}^{t_c+T/2} I_m \sin \psi t dt \right) = \frac{1}{2} I_{cp} \cos \psi. \quad (4.51)$$

При измерении падения напряжения на  $R_n$  его постоянная составляющая, или среднее значение, определяется аналогичным выражением:

$$U_- = \frac{1}{2} U_{cp} \cos \psi. \quad (4.52)$$

Таким образом, выходной ток и выходное напряжение управляемого выпрямителя зависят от сдвига фаз между входным и управляющим напряжениями.

Наибольшее распространение получили полупроводниковые выпрямители, которые не имеют механически взаимодействующих частей и обеспечивают большой частотный диапазон работы. Фазочувствительные выпрямители используют в вольтметрах средних значений и феррометрах, применяемых для магнитных измерений. Наличие градуированного фазовращателя позволяет также определять сдвиг фаз между двумя напряжениями, поочередно подаваемыми на вход преобразователя.

## Глава 5

# ИЗМЕРЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

### 5.1. Измерение токов и напряжений

Измерение силы тока и напряжения — наиболее часто встречающаяся задача. При этом выбор средства измерения определяется многими факторами:

- родом тока и размером измеряемой величины;
- частотой и требуемой точностью измерения;
- влиянием внешних факторов (магнитное поле и т. д.);
- условиями измерения (лабораторные, цеховые, полевые).

Напряжение может быть измерено следующими способами:

1. Путем прямого преобразования напряжения в отклонение указателя отсчетного устройства с помощью электростатического измерительного механизма (ИМ).

2. Путем преобразования напряжения  $U_x$  в ток  $I_x$  с помощью добавочного резистора и измерения тока (с использованием, например, магнитоэлектрического, электромагнитного и других ИМ).

3. Путем прямого сравнения неизвестного напряжения  $U_x$  с известным напряжением  $U_k$ , которым уравнивают (компенсируют) действие  $U_x$ . Напряжение  $U_x$  получают от прибора, называемого *компенсатором напряжения*.

4. Путем косвенного сравнения  $U_x$  с известным напряжением  $U_k$ , посредством уравнивания двух промежуточных величин (например, вращающих моментов), в которые преобразуются  $U_x$  и  $U_k$ . Приборы косвенного сравнения называются *компараторами*.

Измерение силы тока возможно аналогичными способами:

1. Прямым преобразованием тока в отклонение ИМ.
2. Путем преобразования тока в напряжение.
3. Компенсатором.
4. Компаратором.

### 5.1.1. Источники погрешностей, возникающих при измерении токов и напряжений

**Методическая погрешность.** С включением амперметра или вольтметра в электрическую цепь изменяется измеряемая величина. Это вызвано тем, что сопротивление вольтметра не равно бесконечности, а амперметра — нулю. В результате возникает методическая погрешность при измерении токов и напряжений.

Определим методическую погрешность, возникающую при включении амперметра (рис. 5.1 а).

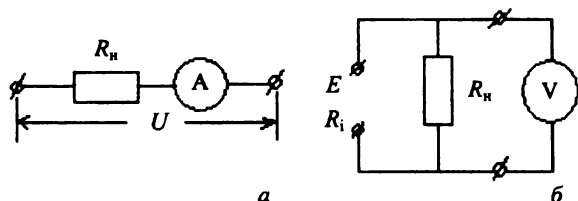


Рис. 5.1. Схема включения амперметра (а) и вольтметра (б)

До включения амперметра

$$I_x = \frac{U}{R_n}. \quad (5.1)$$

После включения с учетом его ненулевого сопротивления

$$I_{изм} = \frac{U}{R_n + R_A}. \quad (5.2)$$

Методическая погрешность, обусловленная включением амперметра, составит

$$\begin{aligned} \gamma_A &= \left( \frac{I_{изм} - I_x}{I_x} \right) 100 \% = \\ &= \left( \frac{-R_A}{R_n + R_A} \right) 100 \% \approx -\frac{R_A}{R_n} 100 \% \cong \left| \frac{P_A}{P} \right| 100 \%, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $P_A$  и  $P$  — мощности, потребляемые амперметром и цепью.

Определим методическую погрешность, возникающую при подключении вольтметра (рис. 5.1 б). После несложных преобразований получим

$$\gamma_v = \left( \frac{U_{\text{изм}} - U_x}{U_x} \right) 100 \% \approx - \frac{R}{R_v} 100 \% \cong \left| \frac{P_v}{P} \right| 100 \% , \quad (5.4)$$

где  $R$  — сопротивление цепи между точками включения вольтметра,  $P_v$  и  $P$  — мощности, потребляемые вольтметром и цепью.

Следовательно, как при измерении тока, так и при измерении напряжения для уменьшения методической погрешности надо выбирать приборы, у которых потребляемая мощность значительно меньше мощности, рассеиваемой в исследуемой цепи. При этом сопротивление амперметра должно быть как можно меньше, а сопротивление вольтметра — как можно больше.

Из средств измерений, используемых для измерения токов и напряжений, наименьшим потреблением мощности обладают компенсаторы (потенциометры), электронные аналоговые и цифровые приборы. Среди электромеханических ИМ наименьшую мощность потребляют электростатические и магнитоэлектрические ИМ.

Весь диапазон измеряемых токов и напряжений можно разбить на три диапазона: малых, средних и больших значений. Наиболее обеспеченным средством измерений является диапазон средних значений: для токов  $\sim 1$  мА — 10 А, для напряжений  $\sim 1$  мВ — 100 В.

**Источники погрешностей при измерении малых и больших токов и напряжений.** При измерении малых токов и напряжений возникают дополнительные трудности:

- обусловленные возникновением термоЭДС в измерительной цепи;
- резистивными и емкостными связями измерительной цепи с посторонними источниками напряжений;
- влиянием внешнего магнитного поля;
- шумами элементов измерительной цепи.

ТермоЭДС возникают в местах соединения разнородных металлов вследствие неоднородного температурного поля в приборе. Простейшим способом устранения данной погрешности является проведение измерений в двух направлениях течения тока и определения среднего значения измеренной величины, поскольку в одном случае термоЭДС складывается с действующей в цепи сторонней ЭДС, а в другом вычитается.

Влияние резистивных и емкостных связей проиллюстрируем схемой измерения напряжения некоторого источника (рис. 5.2).

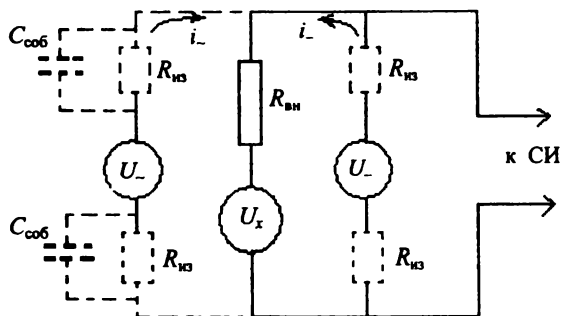


Рис. 5.2. Схема, иллюстрирующая влияние сопротивления изоляции и паразитных емкостей в цепи измерения

Здесь  $U_x$  — источник измеряемого напряжения;  $R_{\text{вн}}$  — внутреннее сопротивление этого источника;  $U_+$  и  $U_-$  — посторонние источники постоянного и переменного напряжения;  $R_{\text{из}}$  и  $C_{\text{соб}}$  — сопротивление и емкость изоляции.

Полагаем, что внутреннее сопротивление СИ много больше внутреннего источника измеряемого напряжения.

Посторонние источники не имеют непосредственной связи с источником измеряемого напряжения, но могут быть связаны с ним через изоляцию, имеющую сопротивление  $R_{\text{из}}$  и емкость  $C_{\text{соб}}$ . Наличие паразитных связей ведет к появлению токов  $i_+$  и  $i_-$ , что, в свою очередь, приводит к возникновению дополнительного падения напряжения:

$$U_{\text{доп}} = R_{\text{вн}} (i_+ + i_-). \quad (5.5)$$

$U_{\text{доп}}$  вместе с  $U_x$  подается на средство измерения, искажая измеряемую величину.

Внешнее переменное магнитное поле также может внести искажение в измеряемое напряжение за счет ЭДС, наводимых в проводах и других элементах цепи.

Полностью устранить влияние указанных факторов, так же как и шумы элементов цепи, невозможно, поэтому измерение малых токов и напряжений осуществляется с большой погрешностью.

**Измерение больших токов и напряжений.** Данный процесс имеет свои особенности, которые также могут стать источниками дополнительных погрешностей.

При измерении больших токов такими источниками являются следующие:

— если измерение производится с помощью шунтов, то выделение мощности на шунтах может приводить к их перегреву, изменению сопротивления и росту погрешности;

— сильное магнитное поле, создаваемое вокруг шин с протекающим через них током, может оказывать влияние на показания СИ, увеличивая погрешность;

— существенную роль играет качество контактных соединений, которое может повлиять на режим цепи и даже вызвать обгорание контактов.

При измерении больших напряжений может возникнуть погрешность, связанная с токами утечки через изоляцию. Например, при использовании делителя в целях расширения пределов измерения СИ сопротивление делителя может оказаться сравнимым с сопротивлением изоляции (рис. 5.3), что приведет к изменению коэффициента деления и, следовательно, к погрешности измерения.

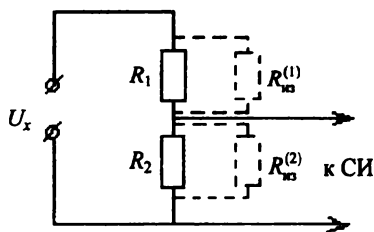


Рис. 5.3. Схема, иллюстрирующая влияние сопротивления изоляции на коэффициент деления резисторного делителя напряжения

При этом вместо коэффициента деления  $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$  реальный коэффициент деления будет

$$K' = \frac{R_2'}{R_1' + R_2'}, \quad (5.6)$$

где  $\dot{R}'$  — общее сопротивление параллельно соединенных сопротивлений. Также следует иметь в виду, что сопротивление изоляции — величина переменная, зависящая от влажности, запыленности и т. д.

### **5.1.2. Измерение постоянных токов и напряжений**

При измерении постоянных токов и напряжений наибольшее применение находят амперметры и вольтметры на основе магнитоэлектрического ИМ, реже — на основе электродинамического ИМ. Наряду с этим также широко используют электронные и цифровые приборы. Электронный прибор содержит тот же магнитоэлектрический механизм, снабженный усилителем на лампах или полупроводниковых элементах, что позволяет поднять его чувствительность. При этом отсчетное устройство может быть выполнено на стрелке, оптическом указателе или на цифровых декадах. Об устройстве собственно цифровых приборов речь пойдет ниже.

В тех случаях, когда чувствительность обычных стрелочных приборов на основе магнитоэлектрического механизма оказывается недостаточной для измерения слабых токов и напряжений или же инерционность подвижной части не позволяет регистрировать быстрые изменения измеряемой величины, их место занимают гальванометры постоянного тока. К ним относятся обычные магнитоэлектрические (зеркальные) гальванометры, а также баллистические гальванометры и флюксметры, в основном используемые для магнитных измерений.

Высокая чувствительность обычного *магнитоэлектрического гальванометра* обусловлена двумя причинами: тем, что в нем противодействующий момент создается не возвратными пружинами, как в механизмах приборов, а возникает как момент закручивания тонкого подвеса рамки, и тем, что отсчет угла поворота подвижной части производится с помощью внешней шкалы и оптического рычага длиной  $\sim 1$  м. При этом чувствительность достигает  $10^{-11}$  А/мм по току и  $10^{-7}$  В/мм по напряжению. В остальном принцип действия не отличается от принципа действия рассмотренного выше магнитоэлектрического ИМ.



*Баллистический гальванометр* является разновидностью магнитоэлектрического гальванометра и предназначен для измерения количества электричества (или заряда) в кратковременных импульсах тока. Баллистический гальванометр отличается большим периодом свободных колебаний подвеса, что достигается увеличением момента инерции подвижной части за счет прикрепления к ней груза. В теории баллистического гальванометра показано, что заряд, протекающий в цепи за время импульса тока, пропорционален первому максимальному отклонению указателя:

$$Q = C_{\text{б}} \alpha_{1\text{м}}. \quad (5.7)$$

Применение баллистического гальванометра для целей магнитных измерений обусловлено тем, что измеренный таким образом заряд оказывается линейно связан с изменением магнитного потока через вторичную обмотку, охватывающую образец из магнитного материала.

Еще меньшие токи (до  $10^{-17}$  А) можно измерить с помощью *электрометра*. Электрометрами называют приборы высокой чувствительности по напряжению с очень большим входным сопротивлением. В основе электрометра лежит электростатический ИМ. Токи с помощью электрометра (рис. 5.4 а) измеряют либо

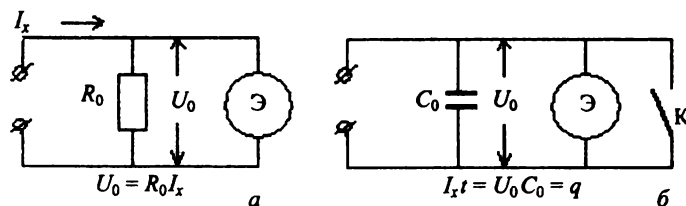


Рис. 5.4. Схемы, иллюстрирующие измерение тока с помощью электрометра

по падению напряжения  $U_0$  на образцовом резисторе  $R_0$ , либо (рис. 5.4 б) по заряду  $q$ , накопленному на конденсаторе емкостью  $C_0$  после размыкания ключа К, отсчитывая время зарядки по секундомеру (при размыкании цепи измеряемого тока происходит зарядка конденсатора этим током).

**Компенсаторы постоянного тока — потенциометры.** Из средств измерений постоянных токов и напряжений в пределах

10 мВ — 1 В наименьшую погрешность дают компенсаторы, или потенциометры.

В потенциометрах осуществляется непосредственное сравнение измеряемого напряжения  $U_x$  (или ЭДС) с известным падением напряжения  $U_K$  на образцовом сопротивлении  $R_K$ . В результате сравнения измеряемое напряжение определяется как

$$U_x = U_K = I_p R_K, \quad (5.8)$$

где  $R_K$  и  $I_p$  — это известное сопротивление компенсатора и ток в нем. Поясним работу компенсатора с помощью упрощенной схемы (рис. 5.5). На рис. 5.5  $U_x$  — измеряемое напряжение,  $E_N$  — нормальный элемент (НЭ) с известной с большой точностью ЭДС,  $E_p$  — источник питания для создания рабочего тока компенсатора,  $R_H$  — измерительное регулируемое сопротивление компенсатора,  $R_K$  — сопротивление, устанавливаемое на регулируемом сопротивлении,  $R_Y$  — установочное сопротивление,  $R_p$  — сопротивление для установки рабочего тока.

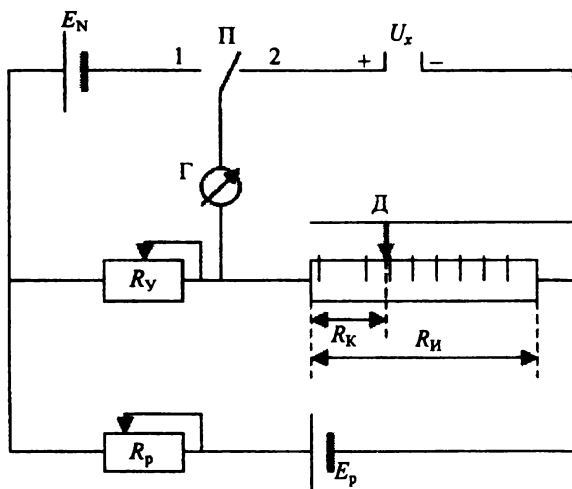


Рис. 5.5. Схема потенциометра, иллюстрирующая его работу

Перед измерением устанавливается рабочий ток  $I_p$  компенсатора, создаваемый батареей  $E_p$ : переключатель  $\Pi$  в положении 1 (установка рабочего тока), реостатом  $R_p$  устанавливают величину рабочего тока, при которой отсутствует ток через нуль-индика-

тор — гальванометр Г. При этом, если  $I_{\Gamma} = 0$ , то по 2-му закону Кирхгофа падение напряжения на установочном сопротивлении  $R_y$  равно ЭДС НЭ:

$$I_p R_y = E_N \rightarrow I_p = \frac{E_N}{R_y}. \quad (5.9)$$

Заметим, что рабочий ток задается величинами  $R_y$ ,  $R_p$  и полным сопротивлением  $R_{\Sigma}$ .

После установки рабочего тока переключатель П переводят в положение 2 и движком Д вновь добиваются отсутствия тока в гальванометре. При этом происходит компенсация (сравнение) измеряемого напряжения  $U_x$  падением напряжения на  $R_k$ , т. е.

$$U_x = I_p R_k = \frac{E_N R_k}{R_y}. \quad (5.10)$$

В высокоточных компенсаторах постоянного тока результат представляется 5—6-разрядным числом.

Для измерения больших напряжений применяют делители напряжения. Измерение тока с помощью компенсатора производят косвенным методом, измеряя падение напряжения на образцовом резисторе при протекании по нему измеряемого тока  $I_x$ .

Наряду с компенсаторами с ручным уравниванием применяют *автокомпенсаторы*, т. е. компенсаторы с автоматическим уравниванием измеряемой величины. В них используют *фотогальванометрические усилители напряжения* (рис. 5.6).

Автокомпенсаторы могут измерять напряжения порядка долей и единиц микровольт. Поясним работу автокомпенсатора с помощью упрощенной схемы (рис. 5.6). На рис. 5.6  $U_x$  — измеряемое напряжение,  $R_k$  — образцовое сопротивление,  $\mu A$  — микроамперметр,  $\Phi c1$ ,  $\Phi c2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  — фотосопротивления и обычные сопротивления соответственно, составляющие плечи моста,  $R_3$  — установочное сопротивление, Г — гальванометр, Л — лампа осветителя гальванометра.

При отсутствии измеряемого напряжения ( $U_x = 0$ ) через высокочувствительный магнитоэлектрический гальванометр тока нет, и свет от зеркальца в равной степени освещает фотосопротивления  $\Phi c1$  и  $\Phi c2$ , входящие в состав моста вместе с  $R_1$  и  $R_2$ . Мост уравновешен, и на входе и выходе усилителя напряжение равно

нулю. При включении измеряемого напряжения ( $U_x \neq 0$ ) через гальванометр потечет ток  $I_\Gamma$ , это приведет к отклонению зеркала, неравномерному освещению фотосопротивлений и разбалансировке моста.

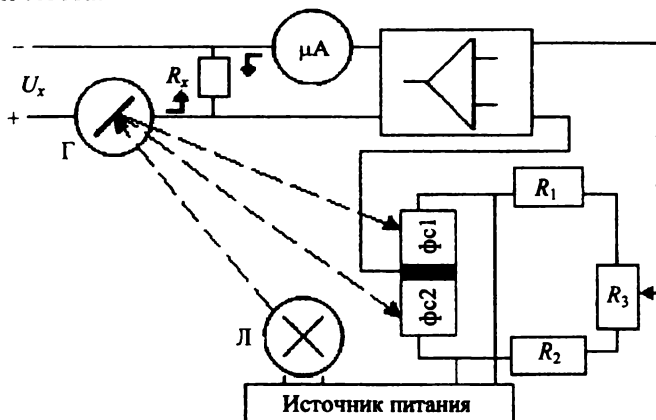


Рис. 5.6. Схема автокомпенсатора с фотогальванометрическим усилителем

Напряжение разбалансировки моста, возникающее в его диагонали, усиливается и создает ток  $I_\kappa$  необходимой полярности для компенсации  $U_x$ . Тогда

$$U_x = R_\kappa I_\kappa. \quad (5.11)$$

При  $R_\kappa = \text{const}$  микроамперметр можно проградуировать в единицах напряжения и непосредственно отсчитывать измеряемое напряжение  $U_x$ .

### 5.1.3. Измерение переменных токов и напряжений

При измерении переменных токов и напряжений можно измерять их действующие  $\left( Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt} \right)$ , амплитудные, средневыпрямленные  $\left( Y_{\text{ср.в}} = \frac{1}{T} \int_0^T |y(t)| dt \right)$ , средние  $\left( Y_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \right)$  и мгновенные значения.

Чаще всего приходится измерять синусоидальные переменные токи и напряжения, которые обычно характеризуются действующим значением. В связи с этим большинство средств измерений переменных токов и напряжений проградуировано в действующих значениях для синусоидальной формы кривой.

Малые и средние переменные токи измеряют цифровыми, электронными, выпрямительными и термоэлектрическими приборами, малые переменные напряжения — электронными вольтметрами. Переменные токи свыше 1 кА и напряжения свыше 1 кВ измеряют с использованием измерительных трансформаторов тока и напряжения.

Наиболее широкий частотный диапазон при измерении токов покрывают термоэлектрические и электронные приборы, а при измерении напряжений — электронные и электростатические приборы. Электродинамические и электромагнитные приборы можно применять в довольно узком частотном диапазоне до нескольких сотен герц или единиц кГц.

В случае измерения переменных периодических сигналов, форма которых отличается от синусоидальной, возникает дополнительная погрешность. Наименее чувствительны к изменению формы кривой токов и напряжений приборы с электростатическим ИМ, а также термоэлектрические и электронные приборы. Наиболее точные измерения действующих значений синусоидальных сигналов позволяют осуществить электродинамические, цифровые приборы и компенсаторы переменного тока.

**Компенсаторы переменного тока — потенциометры.** Для измерения переменных напряжений используют компенсаторы переменного тока.

Принцип действия компенсаторов переменного тока заключается в том, что измеряемое напряжение  $U_x$  или ЭДС уравновешиваются известным напряжением, создаваемым рабочим током на участке рабочей цепи, питаемой напряжением  $U$ .

Для уравновешивания двух напряжений переменного тока необходимо соблюдение следующих условий:

- равенство напряжений по модулю;
- противоположность по фазе;
- равенство частот;
- идентичность формы кривой напряжений.

Обычно форма  $U$  синусоидальная, а  $U_x$  может быть любая, поэтому в общем случае полную компенсацию осуществить нельзя и уравнивают только основную (первую) гармонику  $U_{x1}$ . Равенство частот достигается за счет питания компенсатора и измерительной цепи от одного источника.

Рассмотрим устройство и работу *прямоугольно-координатного компенсатора* (ПКК) переменного тока с помощью упрощенной схемы (рис. 5.7).

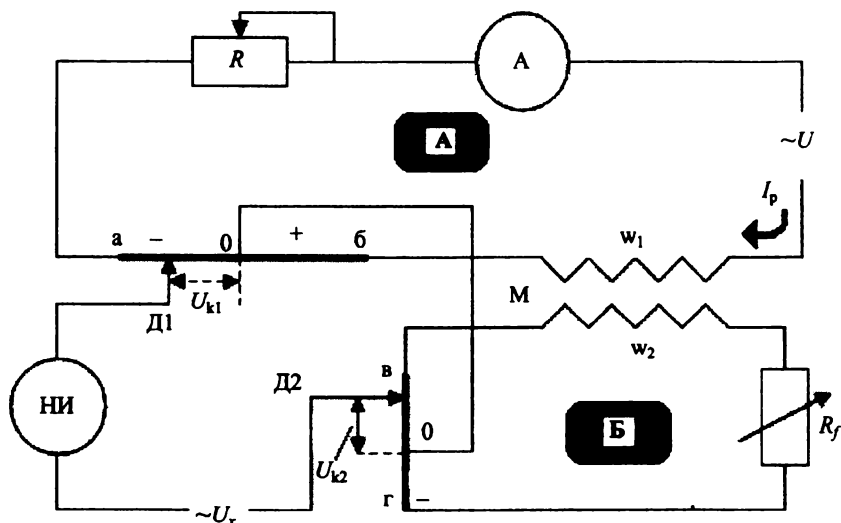


Рис. 5.7. Схема прямоугольно-координатного компенсатора переменного тока

Здесь А и Б — две индуктивно связанные через катушку взаимной индуктивности  $M$  электрические цепи;  $\sim U_x$  — измеряемое напряжение;  $\sim U$  — источник, питающий переменным током цепь А;  $R$  — реостат для регулировки тока питания цепи А; а—б — измерительное сопротивление со средней точкой, находящееся в цепи А; в—г — измерительное сопротивление со средней точкой, находящееся в цепи Б; Д1 и Д2 — движки измерительных сопротивлений;  $R_f$  — сопротивление для подстройки тока в цепи Б в случае изменения частоты питающего напряжения.

ПКК имеет две рабочие цепи А и Б, в которых рабочие токи сдвинуты относительно друг друга по фазе на  $90^\circ$  благодаря тому,

что они связаны между собой с помощью воздушного трансформатора М.

Действительно, ток в первичной обмотке  $w_1$  и ЭДС во вторичной обмотке  $w_2$  трансформатора сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ . Поскольку вторичная обмотка имеет незначительное индуктивное сопротивление, то ток  $I_2$  и  $E_2$  совпадают по фазе. Поэтому  $I_1$  и  $I_2$  оказываются сдвинутыми по фазе также на  $90^\circ$ , причем  $I_2$  отстает от  $I_1$ .

Первая цепь А питается от источника переменного тока  $\sim U$ , в нее включен реостат  $R$  для регулировки тока и амперметра А для его измерения, а также измерительное сопротивление а—б, средняя точка которого соединена со средней точкой измерительного сопротивления в—г второй цепи. Вторая цепь Б содержит также сопротивление  $R_5$ , с помощью которого поддерживают величину тока  $I_2$  постоянной в случае изменения частоты питающего напряжения.

Входная цепь компенсатора состоит из источника измеряемого напряжения  $U_x$ , нуль-индикатора НИ и участков измерительных сопротивлений, определяемых положениями движков Д1 (сопротивление Д1 — 0) и Д2 (сопротивление Д2 — 0). Падения напряжений на этих участках  $U_{k1}$  и  $U_{k2}$  будут суммироваться, однако благодаря имеющемуся сдвигу фаз между  $I_1$  и  $I_2$  и гальваническому соединению средних точек измерительных сопротивлений эти падения напряжений также будут сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ . Для большей наглядности сложения напряжений  $U_{k1}$  и  $U_{k2}$  с учетом разности их фаз строят векторную диаграмму (рис. 5.8).

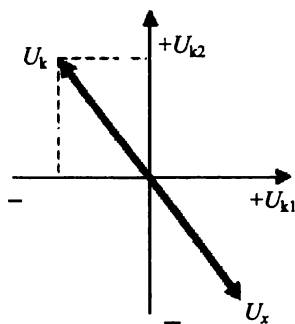


Рис. 5.8. Векторная диаграмма компенсатора переменного тока

Пусть Д2 стоит в положении «0», тогда относительно их общего нуля с помощью движка Д1 можно подавать во входную цепь напряжения  $U_{k1}$  большие или меньшие нуля (ось X). Также для фиксированного положения на нуле Д1 с помощью Д2 можно подавать большие или меньшие нуля напряжения  $U_{k2}$  (ось Y).

В произвольном случае, отображенном на принципиальной схеме (см. рис. 5.7), вектор суммарного напряжения будет находиться во II квадранте диаграммы. При этом, следуя за показаниями нуль-индикатора, можно подобрать такие значения  $U_{k1}$  и  $U_{k2}$ , что результирующий вектор  $U_k$  будет равен по модулю  $U_x$  и противоположен ему по направлению:

$$U_k = U_x. \quad (5.12)$$

Если ось  $U_{k1}$  принять за ось действительных величин, а ось  $U_{k2}$  — за ось мнимых величин, то вектор полного компенсирующего напряжения  $U_k = U_{k1} + jU_{k2}$ . Его модуль и фаза определяются как

$$U_x = U_k = \sqrt{U_{k1}^2 + U_{k2}^2}, \quad (5.13)$$

$$\varphi_x = \varphi_k \pm \pi = \arctg(U_{k2}/U_{k1}) \pm \pi. \quad (5.14)$$

Благодаря тому, что величину рабочего тока  $I_1$  всегда задают одинаковой с помощью  $R$ , а сопротивление а—б калибровано, положение движка можно проградуировать в единицах напряжения. При этом  $I_2$  будет определяться величиной  $I_1$  и частотой  $\omega$ :

$$I_2 = \frac{E_2}{R_2} = \frac{\omega M I_1}{R_2}, \quad (5.15)$$

где  $R_2$  — сопротивление всей вторичной цепи трансформатора М. При изменении частоты питания с помощью  $R_f$  величину  $I_2$  также поддерживают постоянной и при калиброванном сопротивлении в—г положение Д2 также можно проградуировать в единицах напряжения.

Компенсаторы переменного тока обладают меньшей точностью измерений по сравнению с компенсаторами постоянного тока. Это объясняется тем, что не существует меры ЭДС переменного тока, аналогичной нормальному элементу, а также тем, что рабочий ток устанавливается по амперметрам переменного тока, класс точности которых ниже, чем у амперметров постоянного тока.



## 5.2. Измерение сопротивления, индуктивности, емкости, добротности и угла потерь

Для измерения сопротивления, индуктивности, емкости, добротности и угла потерь используют мосты.

*Мостом* называется электрическая цепь, в которой при определенном соотношении сопротивлений могут быть выделены две узловые вершины с равными потенциалами.

Ветви моста носят название *плеч*, диагональ, в которую включен источник питания, называется *диагональю питания*, а диагональ, содержащая указатель равновесия, — *измерительной диагональю*.

Широкое применение мостов объясняется высокой точностью результатов измерения и высокой чувствительностью. В зависимости от характера сопротивлений плеч, образующих мост, и рода тока, питающего мост, выделяют мосты постоянного тока и мосты переменного тока.

### 5.2.1. Мосты постоянного тока

Для измерения сопротивлений на постоянном токе наиболее часто используют две разновидности мостов постоянного тока: одинарные (4-плечие) и двойные (6-плечие).

Принципиальная схема *одинарного моста* представлена на рис. 5.9. Здесь  $R_1, R_2, R_3, R_4$  — сопротивления плеч моста;  $\Gamma$  — гальванометр магнитоэлектрической системы с сопротивлением  $R_\Gamma$ , включенный в диагональ моста  $c-d$ ;  $E$  — источник ЭДС, создающий напряжение питания на диагонали  $a-b$ .

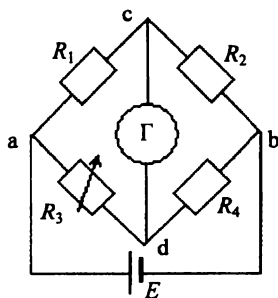


Рис. 5.9. Схема одинарного моста постоянного тока

Уравнение для тока через диагональ с—d может быть получено с использованием законов Кирхгофа и имеет вид

$$I_{\Gamma} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{[R_{\Gamma}(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)]}. \quad (5.16)$$

Мост называют уравновешенным, когда ток в диагонали с гальванометром равен нулю, что наблюдается при определенном соотношении сопротивлений плеч моста. Из уравнения для тока следует, что условию  $I_{\Gamma} = 0$  соответствует равенство

$$R_1 R_4 = R_2 R_3. \quad (5.17)$$

Если в одно из плеч моста включено измеряемое сопротивление, например  $R_1 = R_x$ , тогда оно находится из соотношения равновесия моста

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4}. \quad (5.18)$$

Для достижения равновесия достаточно регулировать одно из сопротивлений плеч, например,  $R_3$ , которое называют *плечом сравнения*, а два других плеча — *плечами отношения*, так как в расчетной формуле фигурирует отношение  $R_2/R_4$ .

Одинарные мосты используют для измерения сопротивлений от долей Ома до  $10^{16}$  Ом. При измерении меньших сопротивлений будет возникать погрешность от сопротивления проводов и сопротивления контактов.

Сведение этих погрешностей сводится к минимуму применением *двойных мостов*. На рис. 5.10 представлена схема двойного моста.

Здесь  $R_x$ ,  $R_N$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  — сопротивления плеч моста,  $r_0$  — калиброванное сопротивление провода, соединяющего  $R_x$  и  $R_N$ , меньшее 0,0001 Ом. Если сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  большие, чем 10 Ом, то погрешностью, вносимой проводами, подключающими эти сопротивления, можно пренебречь.

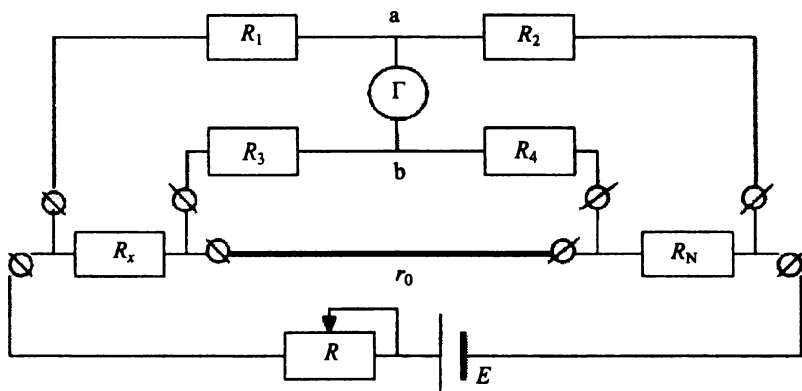


Рис. 5.10. Схема двойного моста постоянного тока

При равновесии моста, т. е. при условии, когда напряжение  $U_{a-b} = 0$ , ток через гальванометр также равен нулю, измеряемое сопротивление находится из уравнения

$$R_x = \frac{R_1 R_N}{R_2} + \frac{R_4 r_0}{R_3 + R_4 + r_0} \left[ \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_3}{R_4} \right]. \quad (5.19)$$

При соблюдении условий  $(R_1/R_2) - (R_3/R_4) \rightarrow 0$  и  $r_0 < 0,001$  Ом в правой части вторым слагаемым можно пренебречь, и условие равновесия приобретает тот же вид, что и для одинарного моста:

$$R_x = \frac{R_1 R_N}{R_2}. \quad (5.20)$$

Измерение сопротивлений с помощью мостов осуществляется с погрешностью 0,001—0,005 %.

### 5.2.2. Уравновешенные мосты переменного тока

*Мосты переменного тока* применяют для измерения емкости, индуктивности, взаимной индуктивности, добротности и угла потерь для электроизоляционных материалов.

В общем случае мост переменного тока (рис. 5.11) в своих плечах содержит, кроме активных сопротивлений, и реактивные

сопротивления, т. е. имеет полные сопротивления  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ . Питание моста осуществляется от источника переменного напряжения, и величина этого напряжения не изменяется.

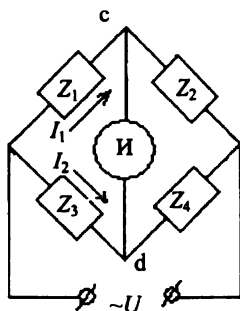


Рис. 5.11. Схема моста переменного тока

Тогда при равновесии моста ток измерителя равен нулю (или  $U_{cd} = 0$ ), и можно записать два уравнения II закона Кирхгофа в комплексной форме:

$$I_1 Z_1 = I_2 Z_3; \quad I_1 Z_2 = I_2 Z_4. \quad (5.20)$$

Поделив левые и правые части уравнений друг на друга, получим условие равновесия моста переменного тока:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \Rightarrow Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3. \quad (5.21)$$

Следовательно, при равновесии моста переменного тока произведения комплексных сопротивлений противолежащих плеч равны друг другу.

Измеряемое сопротивление  $Z_x$  включают в одно из плеч моста, например, в плечо  $Z_1$ , тогда по известным сопротивлениям других плеч оно определяется как

$$Z_x = \frac{Z_2 Z_3}{Z_4}. \quad (5.22)$$

Если представить комплексные сопротивления в алгебраической форме, то условие равновесия моста примет вид

$$(r_1 + jX_1)(r_4 + jX_4) = (r_2 + jX_2)(r_3 + jX_3), \quad (5.22')$$

где  $r_i$  — реальная,  $X_i$  — мнимая части комплексного сопротивления.

После преобразования получим равенство двух комплексных чисел, следовательно, должны быть равны их реальные (вещественные) и мнимые части:

$$r_1 r_4 - X_1 X_4 = r_2 r_3 - X_2 X_3; \quad (5.23)$$

$$r_1 X_4 + r_4 X_1 = r_2 X_3 + r_3 X_2. \quad (5.24)$$

Таким образом, условие равновесия моста переменного тока содержит два уравнения, это отличает данные мосты от мостов постоянного тока. При этом:

1) два независимых уравнения позволяют определить мостом переменного тока *одновременно две независимые величины*;

2) для достижения равновесия моста переменного тока необходимо регулировать *не менее двух параметров*, входящих в уравнения (5.23)—(5.24).

Для более детального анализа выразим условие равновесия моста переменного тока в показательной форме представления комплексных величин:

$$\begin{aligned} Z_1 e^{j\varphi_1} Z_4 e^{j\varphi_4} &= Z_2 e^{j\varphi_2} Z_3 e^{j\varphi_3} \\ Z_1 Z_4 e^{j(\varphi_1 + \varphi_4)} &= Z_2 Z_3 e^{j(\varphi_2 + \varphi_3)}, \end{aligned} \quad (5.22'')$$

где  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  — модули полных сопротивлений плеч;  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  — углы фазового сдвига тока относительно напряжения в соответствующих плечах. Откуда имеем

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3; \quad (5.25)$$

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3. \quad (5.26)$$

Таким образом, равновесие моста наступает при соблюдении следующих условий:

1) при равенстве произведений модулей сопротивлений противолежащих плеч;

2) при определенном расположении реактивных составляющих сопротивлений плеч моста.

Отсюда следует:

— если смежные плечи, например 3-е и 4-е, имеют только активное сопротивление (т. е. фазового сдвига между током и напряжением в них нет и  $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$ ), то для достижения равновесия моста сопротивления двух других смежных плеч должны быть одного характера — либо оба емкостные, либо оба индуктивные, чтобы одинаково сдвигать фазы токов;

— если же активные сопротивления включены в противоположные плечи, например,  $\varphi_1 = \varphi_4 = 0$ , то одно из двух других плеч должно обладать индуктивным, а второе емкостным сопротивлением, чтобы сдвигать фазы токов в разные стороны и обеспечить их компенсацию.

Именно поэтому для измерения емкостей и индуктивностей, как правило, применяют мосты, в которых два плеча представляют собой активные сопротивления.

При измерении емкости конденсатора следует учесть, что он обладает потерями, т. е. в нем поглощается активная мощность.

Представим реальный конденсатор эквивалентной схемой в виде идеальной емкости и параллельно или последовательно соединенного активного сопротивления, обуславливающего возникновение потерь (рис. 5.12 а).

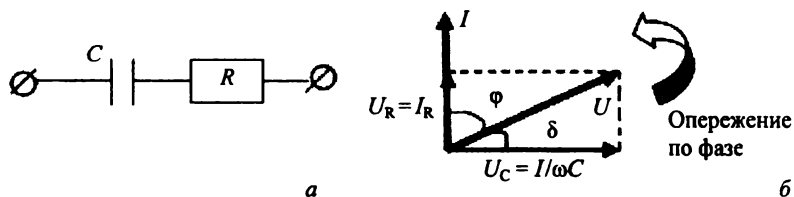


Рис. 5.12. Эквивалентная схема конденсатора (а) и его векторная диаграмма (б)

Известно, что ток в цепи с идеальным конденсатором на  $\pi/2$  опережает напряжение на конденсаторе (см. рис. 5.12 б с векторной диаграммой конденсатора, компонента  $U_C$ ). Если же цепь имеет активные потери, то в ней имеется активное сопротивление  $R$ , при этом падение напряжения на активном сопротивлении по фазе совпадает с изменением тока (компонента  $U_R$ ).

Тогда суммарное падение напряжения на реальном конденсаторе (вектор  $U$ ) должно отставать от изменения тока на угол  $\varphi$ ,

меньший, чем  $\pi/2$ . Угол  $\delta$  — угол потерь — дополняет угол сдвига фаз между током и напряжением до  $\pi/2$ . Его тангенс

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{IR}{(I/\omega C)} = \omega CR. \quad (5.27)$$

Видно, чем меньше потери, тем меньше угол  $\delta$  и  $\operatorname{tg} \delta$ .

Для измерения емкости конденсаторов с малыми потерями (и тангенсом угла потерь) используют мост, схема которого представлена на рис. 5.13.

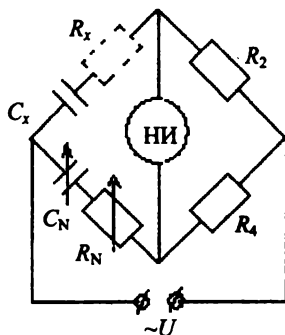


Рис. 5.13. Схема для измерения емкости конденсаторов

Полные сопротивления плеч такого моста

$$Z_1 = R_x + \frac{1}{j\omega C_x}; \quad Z_2 = R_2; \quad Z_3 = R_N + \frac{1}{j\omega C_N}; \quad Z_4 = R_4. \quad (5.28)$$

Подставим их в формулу для равновесия моста (5.21) и получим:

$$\left( R_x + \frac{1}{j\omega C_x} \right) R_4 = \left( R_N + \frac{1}{j\omega C_N} \right) R_2.$$

Из равенства реальной и мнимой частей этого равенства следует:

$$R_x = \frac{R_2 R_N}{R_4}; \quad C_x = \frac{R_4 C_N}{R_2}. \quad (5.29)$$

Для тангенса угла потерь конденсатора с  $C = C_x$  и  $R = R_x$  имеем

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{R_x}{1/\omega C_x} = \omega C_x R_x = \omega \frac{R_4 C_N}{R_2} \cdot \frac{R_2 R_N}{R_4} = \omega C_N R_N. \quad (5.30)$$

В мостах для измерения индуктивности и добротности одно из плеч образуется индуктивностью  $L_x$  с активным сопротивлением  $R_x$ , а другое — образцовой катушкой с индуктивностью  $L_N$  и сопротивлением  $R_N$  (рис. 5.14 а). Но чаще в мостах для измерения индуктивности используют образцовый конденсатор, что объясняется большей их прецизионностью и компактностью по сравнению с катушками индуктивности (рис. 5.14 б). В этом случае для обеспечения равновесия моста  $C_N$  и  $L_x$  включаются в противоположные плечи. Сопротивление  $R_N$  включается параллельно  $C_N$  с тем, чтобы получить отдельный отсчет для  $L_x$  и  $R_x$ .

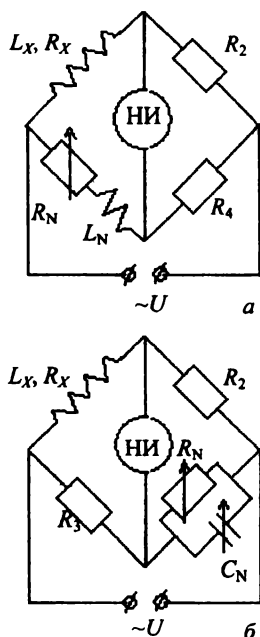


Рис. 5.14. Схема моста для измерения индуктивности с образцовой индуктивностью (а) и образцовой емкостью (б)

Тогда условие равновесия моста дает

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_N}; \quad L_x = C_N R_2 R_3. \quad (5.31)$$



Действительно, полные сопротивления плеч равны

$$Z_1 = R_x + j\omega L_x; \quad Z_2 = R_2; \quad Z_3 = R_3; \quad 1/Z_N = (1/R_N) + j\omega C_N$$

(последнее соотношение для параллельного соединения активного сопротивления  $R_N$  и реактивного  $1/j\omega C_N$ ).

Условие равновесия:  $Z_1 Z_N = Z_2 Z_3$ . Отсюда  $Z_1 = Z_2 Z_3 / Z_N$ , или  $R_x + j\omega L_x = R_2 R_3 (j\omega C_N + 1/R_N)$ . Из равенства действительных и мнимых частей получаем (5.31).

Если  $R_2 = R_3 = 10^3$  Ом, то  $L_x = C_N \cdot 10^6$  Гн, т. е. значение искомой индуктивности в Гн будет равно образцовой емкости в мкФ.

По полученным значениям  $L_x$  и  $R_x$  определяется добротность катушки:

$$Q = \frac{\omega L_x}{R_x} = \omega C_N R_N. \quad (5.32)$$

### 5.3. Измерение электрической мощности

*Мощность в электрической цепи* — это энергия, потребляемая нагрузкой от источника в единицу времени.

Выражение для мощности в цепи постоянного тока имеет хорошо известный вид:  $P_0 = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$ , где  $U$  — напряжение на нагрузке,  $I$  — сила тока в ней.

В однофазных цепях переменного тока мгновенная мощность  $p = u(t)i(t)$ , где  $u$ ,  $i$  — мгновенные значения напряжения и тока в нагрузке.

Среднее значение этой мощности за период колебаний  $T$  называют *активной мощностью*:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt. \quad (5.33)$$

При синусоидальном изменении  $u$  и  $i$ , при сдвиге фаз между ними  $\varphi$  из (5.33) получаем выражение для активной мощности синусоидального тока:

$$P = UI \cos \varphi, \quad (5.34)$$

где  $U$  и  $I$  — действующие значения переменного напряжения и тока:  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ ;  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ .

В цепях переменного тока наряду с активной мощностью различают также *реактивную* ( $Q$ ) и *полную* ( $S$ ) мощности:

$$Q = UI \sin \varphi; \quad S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (5.35)$$

Отношение активной мощности к полной называется *коэффициентом мощности* и определяется по формуле

$$\frac{P}{S} = \cos \varphi. \quad (5.36)$$

В 3-фазных цепях при равномерной нагрузке фаз независимо от способа подключения нагрузки — звездой или треугольником — активная и реактивная мощности выражаются следующим образом:

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = (\sqrt{3})U_\pi I_\pi \cos \varphi, \quad (5.37)$$

$$Q = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi = (\sqrt{3})U_\pi I_\pi \sin \varphi, \quad (5.38)$$

где  $U_\phi$ ,  $I_\phi$  — действующие значения напряжения и тока, индексы «ф» означают фазный ток или напряжение, «л» — линейный ток или напряжение.

Поступление мощности в нагрузку сопровождается выделением на ней теплоты, поглощаемой телом нагрузки:

$$\Theta = P \Delta t = C \Delta T, \quad (5.39)$$

где  $\Delta t$  — время протекания тока в нагрузке,  $\Delta T$  — интервал изменения температуры за время  $\Delta t$ ,  $C$  — теплоемкость тела нагрузки.

Вышеизложенные соображения лежат в основе методов измерения электрической мощности, выделяющейся в нагрузке. Так, соотношение (5.39) лежит в основе тепловых (калориметрических) косвенных методов, а (5.33), (5.34) — в основе электрических прямых методов измерения мощности.

Электрические методы измерения мощности могут быть как прямыми, так и косвенными. Приборы, реализующие *электриче-*

ский метод прямого измерения мощности в соответствии с формулами (5.33), (5.34), имеют структурную схему, изображенную на рис. 5.15, состоящую из следующих элементов: ПП( $I$ ), ПП( $U$ ) — первичные преобразователи напряжения и тока, преобразующие напряжение и ток нагрузки в пропорциональные им напряжения или токи, с тем чтобы на ИПМ (измерительный преобразователь мощности) поступали однородные сигналы, перемножение которых и осуществляет ИПМ.

В зависимости от назначения и устройства ИПМ его выходной сигнал пропорционален мгновенной мощности:  $Y(t) = ku(t)i(t)$ , либо средней (активной) мощности:  $Y(t) = k'UI \cos \varphi$ .

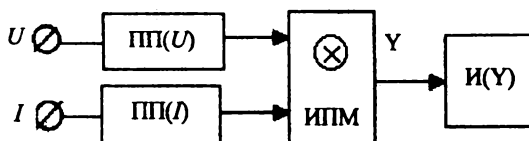


Рис. 5.15. Структурная схема приборов прямого измерения электрической мощности

Выходной сигнал, который может быть представлен напряжением, током, частотой или другой величиной, измеряется соответствующим измерительным прибором И( $Y$ ), градуированным в единицах мощности.

В качестве перемножителей в ваттметрах используют электродинамический, электростатический и индукционный измерительные механизмы, перемножители на преобразователях Холла, а также электронные лампы, диоды, транзисторы и интегральные микросхемы. Методы прямых измерений мощности обладают тем достоинством, что позволяют производить измерения в цепях с любой формой кривой тока и напряжения и при любых значениях  $\cos \varphi$ .

### 5.3.1. Метод калориметра

В соответствии с формулой (5.39) измерение мощности можно производить путем определения приращения температуры  $\Delta T$  рабочего тела нагрузки за выбранное время  $\Delta t$ :

$$P = C \frac{\Delta T}{\Delta t}. \quad (5.40)$$

Это соотношение лежит в основе *косвенного* метода измерения мощности с помощью калориметра. Поскольку количество теплоты  $\Theta$ , выделяющееся в нагрузке, не зависит от формы тока и напряжения, то калибровку *тепловых ваттметров* можно выполнять на постоянном токе ( $I_c$ ). В соответствии с (5.39) имеем

$$\Theta = P\Delta t = I_c^2 R \Delta t_c = C \Delta T_c. \quad (5.41)$$

Откуда получают тепловое значение  $k_c$  — коэффициент, связывающий изменение температуры в калориметре и соответствующее значение введенной в него тепловой энергии:

$$P = \frac{I_c^2 R \Delta t_c}{\Delta T_c} \frac{\Delta T}{\Delta t} = k_c \frac{\Delta T}{\Delta t}. \quad (5.42)$$

Тепловое значение  $k_c$  фактически представляет собой теплоемкость калориметрической системы вместе с телом нагрузки. Затем тепловой ваттметр можно использовать для измерения мощности переменного тока по измерению приращения температуры и времени измерения.

Упрощенная схема калориметра с переменной температурой приведена на рис. 5.16. Калориметрический сосуд помещают в оболочку, теплоизолированную от внешней среды, заполняют калориметрической жидкостью (минеральное масло, дистиллированная вода и т. п.), обеспечивая ее перемешивание. Нагрев калориметрической системы, фиксируемый, например, термометром, и служит мерой введенного количества теплоты.

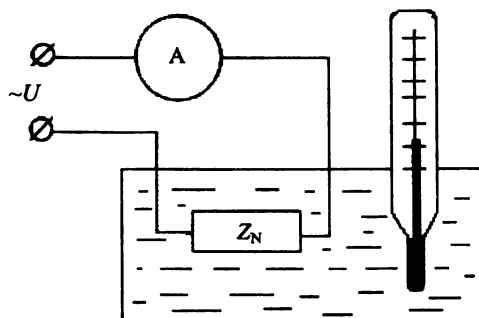


Рис. 5.16. Упрощенная схема калориметра

Затем по формуле (5.42) рассчитывается мощность, выделяющаяся в нагрузке.

### 5.3.2. Метод амперметра — вольтметра

Метод амперметра — вольтметра (рис. 5.17) относится к косвенным электрическим методам измерения мощности и основан на измерении исходных величин тока и напряжения, а не самой мощности.

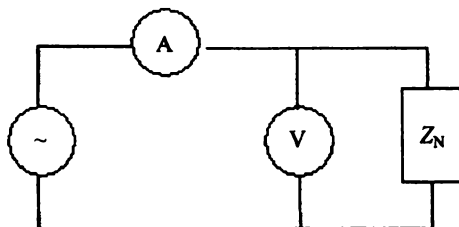


Рис. 5.17. Электрическая схема метода амперметра — вольтметра

При измерении тока и напряжения на реактивной нагрузке  $Z_N$  можно рассчитать только полную мощность  $S = UI$ . Измерение активной мощности методом амперметра — вольтметра возможно, если измерительная схема дополняется специальным измерителем коэффициента мощности либо при использовании фазочувствительного вольтметра, показания которого пропорциональны  $U \cos \varphi$ . Для исключения погрешностей, вызванных включением измерительных приборов, вводят поправку на мощность, рассеиваемую на вольтметре,

$$P_V = \frac{U_n^2}{R_V}, \quad (5.43)$$

где  $U_n$  — это напряжение на  $Z_N$  (и на вольтметре),  $R_V$  — активное сопротивление вольтметра.

### 5.3.3. Электродинамический ваттметр

Электродинамический ваттметр предназначен для *прямых измерений активной мощности* в диапазоне частот 50—500 Гц (иногда до 10 кГц). В электродинамических ваттметрах измерительным преобразователем мощности является электродинамический измерительный механизм, который состоит из двух катушек — подвижной и неподвижной.

Отклонение указателя обусловлено взаимодействием магнитных полей токов, пропускаемых по катушкам. Уравнение преобразования электродинамического механизма имеет вид

$$\alpha = \frac{1}{k} I_A I_B \cos \psi \frac{dM}{d\alpha}, \quad (5.44)$$

где  $I_A$ ,  $I_B$  — действующие значения токов в катушках в случае переменного тока,  $\psi$  — угол сдвига фаз этих токов,  $k$  — удельный противодействующий момент,  $M$  — момент вращения,  $\alpha$  — угол поворота.

Рассмотрим принципиальную схему подключения электродинамического ваттметра (рис. 5.18). Пусть А — неподвижная, Б — подвижная катушки ИМ. Катушки прибора включаются в разные цепи. Неподвижная катушка А включается последовательно с нагрузкой  $Z_N$  (как амперметр) с помощью двух зажимов, называемых токовыми, подвижная катушка Б включается параллельно нагрузке (как вольтметр) с помощью двух зажимов напряжения. Зажимы ваттметра, помеченные звездочкой, включаются со стороны источника питания; они называются генераторными и должны быть соединены между собой, так как являются началами катушек и такое соединение обеспечивает отклонение указателя в правильную сторону.

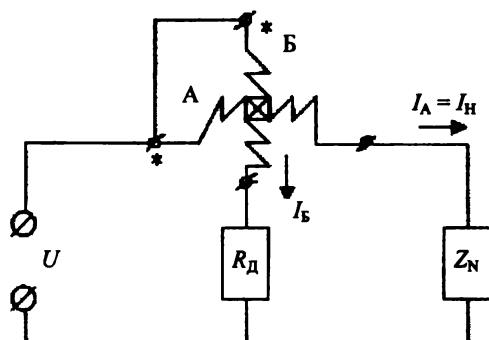


Рис. 5.18. Электрическая схема электродинамического ваттметра

Уравнение преобразования для электродинамического ваттметра приобретает вид

$$\alpha = \frac{1}{k} I_A \frac{U}{Z_B} \cos \psi \frac{dM}{d\alpha}, \quad (5.45)$$

где  $I_B = U/Z_B$ ,  $Z_B$  — суммарное сопротивление катушки Б и добавочного резистора  $R_d$ .

Размеры катушек и их расположение подбирают так, чтобы конструкция обеспечивала выполнение условия  $dM/da = \text{const}$ .

Если сопротивление параллельной цепи считать только активным (т. е. между током через параллельную цепь  $I_B$  и напряжением  $U$  на ней сдвига фаз нет), то сдвиг фаз между  $I_A$  и  $I_B$  будет равен сдвигу фаз между  $I_H$  и  $U$ , т. е.  $\cos \psi = \cos \varphi$ .

После подстановки в (5.45), объединив константы, получим

$$\alpha = SUI_H \cos \varphi = SP, \quad (5.46)$$

где  $S = \frac{1}{wZ_B} \frac{dM}{da}$  — чувствительность электродинамического

ваттметра. Это уравнение для электродинамического ваттметра справедливо и для постоянного ( $\cos \varphi = 1$ ) и для переменного тока.

При измерении на переменном токе  $Z_B \neq r_B$  вследствие некоторой индуктивности катушки Б, что дает отставание тока в ней от напряжения на некоторый угол  $\Theta$  и вносит угловую погрешность в результат измерения:

$$\delta = \frac{UI_H \cos(\varphi - \Theta) - UI_H \cos \varphi}{UI_H \cos \varphi}. \quad (5.47)$$

С учетом  $\sin \Theta \approx 0$ ,  $\cos \Theta \approx 1$  эта погрешность оказывается примерно равной

$$\delta \approx \Theta \operatorname{tg} \varphi. \quad (5.48)$$

Видно, что измерение мощности при малых значениях  $\cos \varphi$  (тогда  $\varphi \rightarrow 90^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \infty$ ) сопровождается резким увеличением погрешности ваттметра. Для этих случаев, кроме ваттметров с номинальным значением  $\cos \varphi = 1$ , выпускают малокосинусные ваттметры с  $\cos \varphi = 0,1$ , в которых чувствительность резко увеличена благодаря уменьшению  $k$ .

Для расширения пределов измерения электродинамических ваттметров в сторону малых значений входных величин во входных цепях ваттметра используют электронные измерительные усилители.

### 5.3.4. Ваттметр на квадратирующих элементах

Существуют ИПМ, характеризующиеся отсутствием механически перемещающихся частей. В частности, используют преобразователи на элементах с *квадратичной зависимостью выходного сигнала от входного*.

Разность выходных напряжений двух идентичных квадратирующих элементов, на входы которых поступают соответственно сумма и разность двух электрических сигналов  $U_1$  и  $U_2$ , пропорциональна их произведению:

$$\Delta U = k(U_1 + U_2)^2 - k(U_1 - U_2)^2 = 4kU_1U_2. \quad (5.49)$$

В качестве квадраторов применяют термоэлектрические преобразователи, полупроводниковые приборы с квадратичной вольт-амперной характеристикой: диоды, полевые и биполярные транзисторы.

Наиболее простыми являются квадраторы, использующие отрезки нелинейных вольт-амперных характеристик полупроводниковых и вакуумных диодов. На рис. 5.19 представлена принципиальная схема *ваттметра с использованием диодов*. Параллельно источнику питания  $u$  включен делитель напряжения из резисторов  $R_1$  и  $R_2$ . Последовательно с нагрузкой  $Z_N$  включены два резистора  $R_3$ , по которым протекает ток, практически равный току нагрузки  $i$ , так как токи ответвления  $i'$ ,  $i_1$ ,  $i''$  малы, благодаря большой величине сопротивлений ИП и резисторов  $R_1$ ,  $R_2$ . Резисторы  $R_4$  включены последовательно с диодами  $D_1$  и  $D_2$ , ограничивая ток через них так, чтобы рабочая точка устанавливалась на квадратичном участке вольт-амперной характеристики диодов.

Пусть в некоторый момент времени падения напряжения на  $R_1$  и  $R_3$  составляют  $u_1$  и  $u_2$ , а их знаки соответствуют изображенному на рис. 5.19. Для мгновенного значения падения напряжения на  $R_1$ , как сопротивлению делителя напряжения, имеем  $u_1 = i_1 R_1 = k_1 u$  при  $i_1 \ll i$ . Таким образом,  $u_1$  пропорционально напряжению на нагрузке. Для мгновенного значения падения напряжения на  $R_3$  имеем  $u_2 = i_2 R_3 = k_2 i$ , т. е.  $u_2$  пропорционально току через нагрузку. Далее необходимо произвести сложение и вычитание этих напряжений, возведение суммы и разности в квадрат и вычитание квадратов, что по (5.49) и позволит определить *мощность на нагрузке*. Это достигается следующим образом.



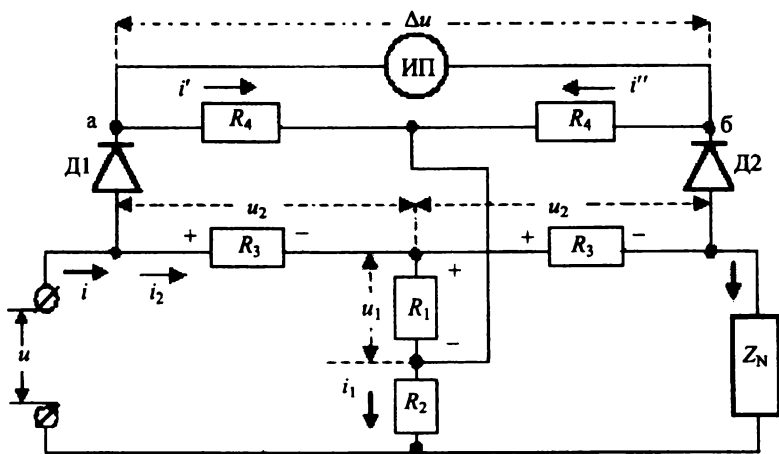


Рис. 5.19. Схема ваттметра с использованием диодов

Из схемы видно, что к диоду  $D_1$  (вместе с  $R_4$ ) приложена сумма:  $u_1 + u_2 = k_1 u + k_2 i$ , а к диоду  $D_2$  (вместе с  $R_4$ ) — разность этих же напряжений:  $u_1 - u_2 = k_1 u - k_2 i$ .

Токи  $i'$  и  $i''$  — выпрямленные токи, пропорциональные квадратам приложенных напряжений, т. е.  $i' = k_3(u_1 + u_2)^2$  и  $i'' = k_3(u_1 - u_2)^2$ .

Между точками а и б действует разность напряжений:  $\Delta u = (i' - i'')R_4$ , приложенная к измерительному прибору ИП и пропорциональная мгновенному значению мощности:

$$\Delta u = [k_3(u_1 + u_2)^2 - k_3(u_1 - u_2)^2]R_4 = 4k_3R_4u_1u_2 = kui = kp. \quad (5.50)$$

Так как ИП магнитоэлектрической системы реагирует на среднее значение  $\Delta u$ , выполняя роль интегратора, то его показания — угол отклонения подвижной части — будут пропорциональны мощности, потребляемой нагрузкой:

$$\alpha = KP. \quad (5.51)$$

Основная погрешность таких ваттметров относительно велика, что в основном обусловлено неидентичностью преобразователей  $D_1$  и  $D_2$  и отклонением их характеристик от квадратичных.

### 5.3.5. Модуляционный ваттметр

Одним из наиболее точных современных ваттметров постоянного и переменного тока является *модуляционный ваттметр*, погрешность которого не превосходит 0,02 % на промышленной частоте и менее 0,1 % в диапазоне частот до 10 кГц. На рис. 5.20 представлены структурная схема и временные диаграммы, иллюстрирующие работу ИПМ японской фирмы YEW, примененного в модуляционном ваттметре.

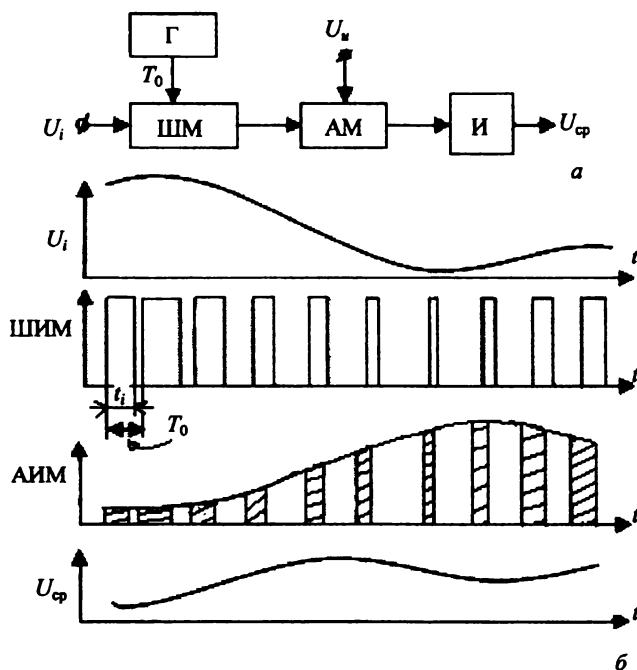


Рис. 5.20. Структурная схема (а) и временные диаграммы (б) модуляционного ваттметра

Этот ИПМ относится к группе преобразователей, принцип действия которых состоит в том, что аналоговые входные сигналы  $U_u$  и  $U_i$ , пропорциональные напряжению на нагрузке току в ней, линейно преобразуются в параметры последовательности импульсов, близких к прямоугольным — в амплитуду импульса  $U_a$ , частоту следования  $f$ , период следования  $T$ , длительность  $t$  или

скважность  $t/T$ . В ваттметре реализован метод получения произведения входных сигналов путем широтно-импульсной и амплитудной модуляции импульсного сигнала — ШИМ — АМ, при которой  $U_i$  преобразуется в длительность импульсов, а  $U_u$  в амплитуду импульсов.

При модуляции ШИМ — АМ (рис. 5.20 а) длительность импульсов тактового генератора Г, имеющих фиксированный период следования  $T_0$  (рис. 5.19 б), модулируется в широтном модуляторе (ШМ) напряжением  $U_i(t)$ . Теперь импульсы длительностью  $t_i = kU_i(t)$ , которая оказывается пропорциональной значению тока, поступают в амплитудный модулятор (АМ), где модулируются по амплитуде напряжением  $U_u$ .

Площадь каждого из импульсов на выходе АМ пропорциональна мгновенной мощности при условии, что изменением  $U_i$  и  $U_u$  за период  $T_0$  можно пренебречь:

$$s(t) = U_u(t)t_i(t) = kU_u(t)U_i(t). \quad (5.52)$$

Интегрирование (И — интегратор) напряжения на выходе АМ дает среднее за период входных сигналов значение мощности.

Напомним, что при работе данного ИПМ длительность цикла модуляции должна быть много меньше периода входных сигналов или что входные сигналы неизменны в течение цикла преобразования. Нарушение этого условия вызывает методическую погрешность. Для снижения методической погрешности до 0,2 % отношение периода входных сигналов к периоду импульсов широтной модуляции должно лежать в пределах 20—40 даже при синусоидальной форме  $U_i$  и  $U_u$ . Это соотношение легко реализуется при промышленной частоте и вызывает серьезные трудности при частотах более 10 кГц.

### 5.3.6. Измерение энергии в электрической цепи

Энергия в электрических цепях учитывается с помощью интегрирующих приборов — счетчиков электроэнергии. Для учета энергии переменного тока широко используются приборы, построенные на основе индукционного ИМ. Принцип действия индукционного ИМ основан на взаимодействии переменных магнитных полей с токами, индуцируемыми в проводящем

неферромагнитном подвижном диске этими магнитными полями. Возникающий в результате этого взаимодействия вращающий момент, действующий на диск,

$$M_{вр} = k\Phi_1\Phi_2 \sin \psi, \quad (5.53)$$

где  $k$  — коэффициент, зависящий от конструктивных параметров механизма,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  — потоки магнитных полей,  $\psi$  — фазовый сдвиг между ними.

На рис. 5.21 схематично представлено устройство однофазного счетчика и подключение нагрузки к нему. Переменные магнитные потоки создаются электромагнитами 1 и 2, по обмоткам

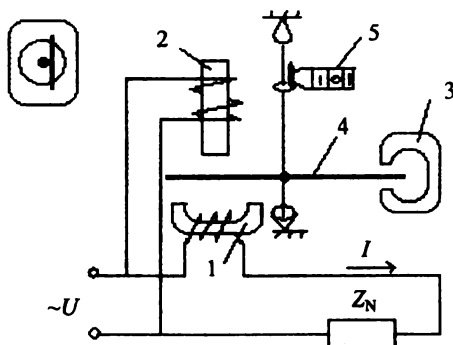


Рис. 5.21. Функциональная схема счетчика электроэнергии

которых протекают переменные токи, пропорциональные току нагрузки и напряжению нагрузки  $Z_N$ . Поток  $\Phi_1$  создается электромагнитом 1, питаемым током нагрузки с круговой частотой  $\omega$ , поэтому имеем

$$\Phi_1 = \Phi_I = k_1 I. \quad (5.53)$$

Поток  $\Phi_2$  создается обмоткой электромагнита 2, состоящей из большого числа витков  $w$ , и можно считать, что все приложенное к ней напряжение уравнивается ЭДС самоиндукции  $E$ , т. е.  $U = E = w\omega\Phi_2$ . Откуда  $\Phi_2 = U/w\omega$ . Тогда для  $\Phi_U$  можно записать

$$\Phi_2 = \Phi_U = k_2 U. \quad (5.54)$$

Потоки  $\Phi_I$  и  $\Phi_U$  создают вихревые токи в диске. Из всех возможных взаимодействий между вихревыми токами и потоками вра-

щающий момент возникает лишь от взаимодействия вихревых токов  $I(\Phi_I)$  с  $\Phi_U$  и  $i(\Phi_U)$  с  $\Phi_I$ .  $\psi$  — фазовый сдвиг между потоками  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , который отличается от фазового сдвига  $\phi$  между  $I$  и  $U$ , благодаря сдвигу фаз между соответствующими потоками и ЭДС, а также благодаря наличию потерь в сердечнике. Можно считать, что  $I$  и  $\Phi_1$  синфазны, а сдвиг фаз между  $\Phi_2$  и  $E$  составляет примерно  $\pi/2$ . Тогда получим, что  $\Phi_1\Phi_2\sin\psi = IU\sin(90 - \psi) = IU\cos\phi$ .

Для компенсации вклада потерь в сердечнике в сдвиг фаз между  $\Phi_2$  и  $E$  в электромагните 2 используют зазор с регулируемым магнитным сопротивлением, что дает возможность подстраивать угол  $\psi$  между  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . Окончательно уравнение преобразования ИМ счетчика принимает вид

$$M_{\text{вп}} = kk_1k_2IU\cos\phi = KIU\cos\phi = K_{\text{вп}}P, \quad (5.55)$$

где  $P$  — мощность в нагрузке.

Диск счетчика 4 снабжен еще одним электромагнитом 3, создающим тормозной момент при вращении диска. Диск, двигаясь с угловой скоростью  $d\alpha/dt$  в зазоре магнита, пересекает его магнитный поток, при этом в диске индуцируется ЭДС и появляется ток. Взаимодействие тока с потоком магнита создает момент, направленный в сторону, противоположную движению диска:  $M_{\tau} = -K_{\tau}(d\alpha/dt)$ . Установившаяся скорость вращения диска наступает при равенстве моментов  $M_{\text{вп}}$  и  $M_{\tau}$ . Откуда имеем  $M_{\text{вп}} + M_{\tau} = 0$  или  $d\alpha = (K_{\text{вп}}/K_{\tau})Pdt$ . Интегрируя по времени, получаем, что угол поворота или число оборотов диска  $N$  за время от  $t_1$  до  $t_2$  ( $\alpha = 2\pi N$ ) прямо пропорционально потребленной нагрузкой энергии ( $W$ ):  $\alpha = (K_{\text{вп}}/K_{\tau})\int Pdt = (K_{\text{вп}}/K_{\tau})W$ , или  $W = SN$ , где  $S$  (Вт с/оборот) — постоянная счетчика,  $N$  регистрируется отсчетным механизмом роликового типа 5.

## Глава 6

# ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

### 6.1. Квантование, дискретизация и кодирование сигналов

*Цифровой измерительный прибор (ЦИП)* — это средство измерения, в котором измеряемая аналоговая величина преобразуется в код с выводом информации на цифровое отсчетное устройство.

К достоинствам цифровых измерительных приборов относятся:

- большое входное сопротивление;
- широкий диапазон измеряемых значений;
- высокая точность измерения;
- индикация результатов измерения в цифровой форме;
- объективность отсчета (в отличие от стрелки со шкалой);
- возможность вывода результата измерения на принтер;
- возможность совместной работы с ЭВМ.

Блок-схема цифрового измерительного прибора (рис. 6.1) состоит из следующих узлов: ИП — измерительный преобразователь входной величины  $X$ , АЦП — аналого-цифровой преобразователь, ПКК1 и ПКК2 — преобразователи код — код, ЦОУ — цифровое отсчетное устройство.

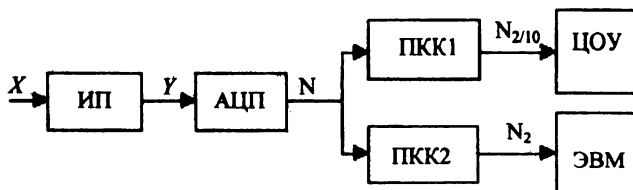


Рис. 6.1. Блок-схема цифрового измерительного прибора

Входная непрерывно изменяющаяся величина поступает на измерительный преобразователь (ИП), который преобразует ее

в аналоговую величину  $Y$ , удобную для цифрового кодирования —  $U, I, f$ , сдвиг фаз  $\varphi$ , интервал времени  $t$ , затем поступает на АЦП, преобразующий поступивший сигнал в код  $N$ , после чего для считывания с помощью ЦОУ код  $N$  в ПМК1 преобразуется в двоично-десятичный код  $N_{2/10}$ , в ПМК2 — в двоичный код  $N_2$ , подаваемый в ЭВМ.

Таким образом, центральное место в ЦИП занимает АЦП, в котором осуществляются квантование, дискретизация и кодирование сигналов.

1. *Квантование* — это разделение измеряемой величины  $X$  на ступени квантования  $\Delta X$ . Проиллюстрируем процесс квантования диаграммой (рис. 6.2).

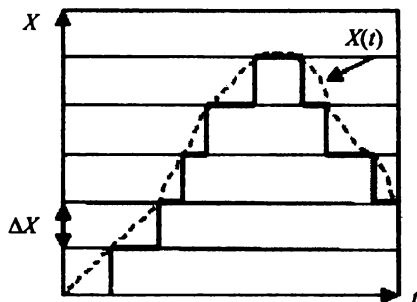


Рис. 6.2. Диаграмма квантования измеряемой величины

Текущее значение измеряемой величины  $X = X_k$  при  $\Delta X = \text{const}$  определяется ближайшим уровнем квантования

$$X_k = N_k \Delta X, \quad (6.1)$$

где  $N_k$  — число ступеней квантования,  $\Delta X$  — шаг квантования. Шаг квантования представляет собой и абсолютную погрешность квантования:

$$X - X_k \leq \Delta X. \quad (6.2)$$

2. *Дискретизация* — это представление непрерывной функции  $X = f(t)$  рядом ее мгновенных значений  $X_k$  через интервал времени  $\Delta t$ , который называется шагом дискретизации.

Шаг дискретизации может быть постоянным (рис. 6.3) и переменным.

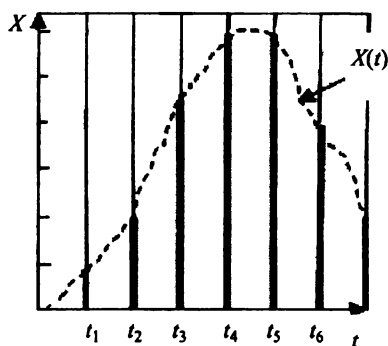


Рис. 6.3. Диаграмма дискретизации измеряемой величины

Шаг дискретизации принимают постоянным, если  $X(t)$  изменяется медленно. Если же быстро, то шаг дискретизации принимают изменяющимся обратно пропорционально скорости изменения величины:  $\Delta t = F(1/(dx/dt))$ .

3. В АЦП измеряемый сигнал подвергается *одновременному квантованию и дискретизации*, а затем кодируется. При дискретизации измеряемая величина заменяется рядом мгновенных значений, каждое из которых подвергается квантованию и заменяется ближайшим значением уровня квантования, т. е.

$$X_k = N_k \Delta X. \quad (6.3)$$

Таким образом, при  $\Delta X = \text{const}$  мгновенному значению измеряемой величины соответствует число ступеней квантования  $N_k$ , которое является кодом мгновенного значения  $X$ .

Выше предполагалось, что кодирование выполнялось с использованием образцовых ступеней  $\Delta X$  той же физической природы, что и измеряемая величина. Существует другой способ кодирования, который состоит в том, что мгновенное значение измеряемой величины сначала преобразуется в *промежуток времени* и затем представляется *числом электрических импульсов* с постоянной частотой следования. В этом случае ступень квантования — это один импульс, а *кодом* мгновенного значения измеряемой величины является *число импульсов*. Сформированный тем или иным способом код далее преобразуется в цифровую



форму, которая представляется на отсчетном устройстве или поступает в ЭВМ.

Счет числа ступеней квантования выполняется в двоичной системе счисления. Это связано с тем, что ряд технических устройств имеет два устойчивых состояния: например, электронная лампа или п/п транзистор при подаче на управляющий электрод (сетку, базу) сигнала могут иметь низкий или высокий потенциал на выходе. Состоянием подобных устройств и осуществляется техническая реализация счета и кодирования.

## 6.2. Системы счисления и коды

В измерительной технике используются следующие системы счисления: единичная, десятичная, двоичная, двоично-десятичная.

В *единичной системе* любое целое число выражается суммой единиц. Остальные из указанных систем являются позиционными, т. е. числовое значение символа в них зависит от его места (позиции) в числе, а любое целое число представляется суммой числовых значений этих символов:

$$N = \sum_{i=1}^m k_i a^{i-1}, \quad (6.4)$$

где  $a$  — число, называемое основанием системы и равное числу цифр этой системы (для десятичной — 10, для двоичной — 2);  $a^{i-1}$  — дает вес  $i$ -го разряда;  $k_i$  — коэффициент, представляющий значение  $i$ -го разряда, выражаемое одной из цифр системы счисления (0, 1, 2, ..., 9 — в десятичной, 0, 1 — в двоичной);  $m$  — количество разрядов, задействованных в числе.

Для десятичной системы имеем

$$N_{(10)} = \sum_{i=1}^m k_i 10^{i-1}. \quad (6.5)$$

Веса разрядов в ней, начиная с младшего, стоящего справа:  $10^0 = 1$ ,  $10^1 = 10$ ,  $10^2 = 100$ ,  $10^3 = 1000$  ...

Для краткости число записывается коэффициентами  $k_i$ , стоящими в соответствующих позициях — разрядах. Например,

$$3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 351.$$

В двоичной системе только два знака 0, 1, поэтому основание в ней  $a = 2$ , коэффициенты  $k_i$  также могут принимать только два значения 0, 1. Поэтому имеем

$$N_{(2)} = \sum_{i=1}^m k_i 2^{i-1}. \quad (6.6)$$

Веса разрядов в ней, начиная с младшего:  $2^0 = 1$ ,  $2^1 = 2$ ,  $2^2 = 4$ ,  $2^3 = 8$ , ... То же число 351 в двоичной системе — 101011111:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ = 256 + 0 + 64 + 0 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 351. \end{aligned}$$

Алгоритм нахождения коэффициентов состоит в делении числа на 2, при этом остаток от первого деления является значением младшего разряда и т. д., остаток от последнего деления дает значение предпоследнего разряда, а результат последнего деления является значением старшего разряда.

Для числа 351 имеем:  $351 : 2 = 175 + 1$  (1 в младший разряд);  $175 : 2 = 87 + 1$  (1 в следующий разряд); ...  $10 : 2 = 5 + 0$  (0 в следующий разряд);  $5 : 2 = 2 + 1$  (1 в следующий разряд);  $2 : 2 = 1 + 0$  (!! 1 в старший разряд).

В двоично-десятичной системе все как в десятичной системе: веса разрядов соответствуют десятичной системе, значение разряда выражается числами от 0... до 9, но значение чисел в каждом разряде представляется в двоичной системе.

Если для того, чтобы выразить значение чисел в каждом разряде двоично-десятичного числа, использовать 3-разрядные двоичные числа, то максимальное число, которое можно выразить, — это только  $111 \rightarrow 7$ , поэтому необходимо использовать 4-разрядные двоичные числа, что является, вообще говоря, избыточным.

Действительно, наибольшее двоичное 4-разрядное число  $1111 \rightarrow 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$  соответствует уже 15, а максимальное число, которое надо выразить, только 9. Поэтому в двоично-десятичной системе используют такие веса, при которых максимальное число может быть равно 9.

Например, веса 4 разрядов такие:  $2 - 4 - 2 - 1$  (т. е.  $2^1, 2^2, 2^1, 2^0$ ), тогда максимальное число  $1111 \rightarrow 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 9$ .

Или веса разрядов:  $1 - 2 - 2 - 4$ , и снова максимальное число  $1111 \rightarrow 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 9$ .

То же число 351 в двоично-десятичной системе:  $2 - 4 - 2 - 1 \rightarrow 001101010001$ .

### 6.3. Принципы построения АЦП

Остановимся на основных методах преобразования непрерывных измеряемых величин в коды.

*Времяимпульсный метод* преобразования основан на преобразовании измеряемой величины в пропорциональный интервал времени, в течение которого на счетчик поступают импульсы строго стабильной частоты, так что число импульсов, сосчитанных за этот интервал времени, оказывается пропорциональным значению измеряемой величины.

Рассмотрим структурную схему АЦП с времяимпульсным методом преобразования и временную диаграмму, иллюстрирующую его работу (рис. 6.4).

Пусть входной сигнал — измеряемое напряжение —  $U_x$ .  $f_0$  — частота стабильных импульсов генератора импульсов ГИ.  $U_0$  — напряжение, вырабатываемое генератором линейного напряжения ГЛН.

В момент времени «а» блок управления вырабатывает импульс-команду, который одновременно сбрасывает показания счетчика, запускает генератор линейного напряжения и открывает электронный ключ, пропускающий импульсы стабильной частоты  $f_0$  с генератора импульсов на счетчик. В момент времени «б», когда  $U_x = U_0$ , в сравнивающем устройстве вырабатывается импульс, запирающий электронный ключ. При этом количество импульсов, сосчитанное счетчиком за интервал времени а—б, оказывается пропорциональным мгновенному значению измеряемого напряжения на момент «б».

Действительно, с одной стороны, интервал времени а—б  $\rightarrow T_x$ :  $T_x = \alpha U_0(b) = \alpha U_x(b)$ , где  $\alpha$  — крутизна пилообразного напряжения.

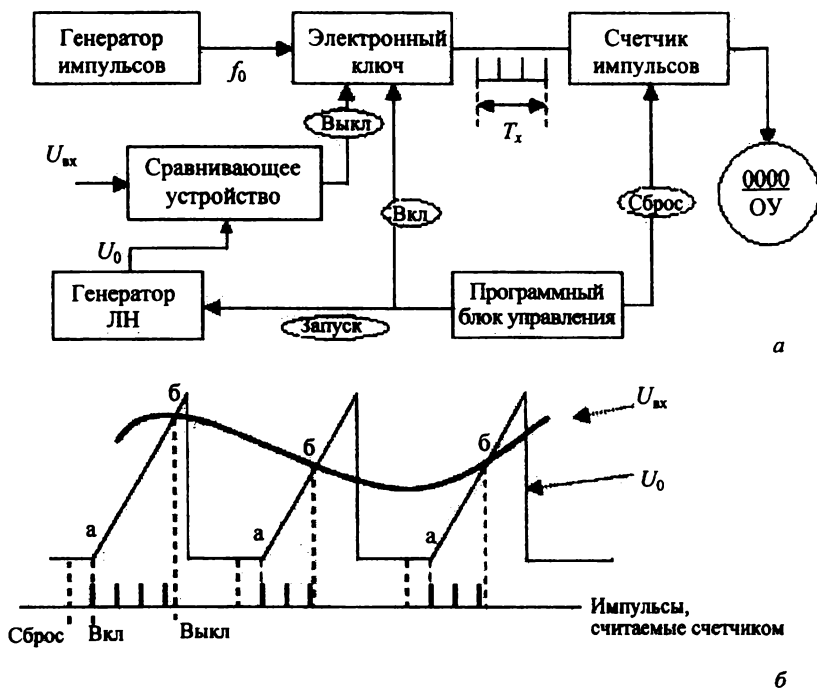


Рис. 6.4. Структурная схема времяимпульсного АЦП (а) и его временная диаграмма (б)

С другой стороны, количество импульсов пропорционально интервалу времени:  $N_x = f_0 T_x$ . Откуда

$$N_x = \alpha f_0 U_x. \quad (6.7)$$

Таким образом, в данном случае код, которым является число импульсов  $N_x$ , пропорционален  $U_x$ .

Источником погрешности времяимпульсного АЦП могут быть следующие причины:

1. Отклонение от линейности ГЛН и нестабильность крутизны наклона линейного участка.
2. Нестабильность частоты генератора импульсов.
3. Высота порога чувствительности сравнивающего устройства.
4. Погрешность дискретности и погрешность из-за отсутствия синхронизации ГИ и Сч, и то и другое приводит к тому, что число

периодов следования  $T_0$  не совпадает с длительностью измеряемого интервала времени.

Поясним это с помощью диаграммы (рис. 6.5):

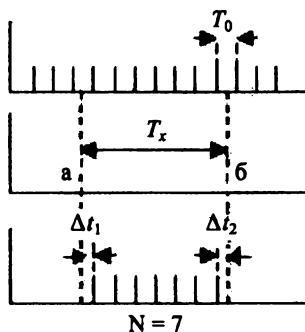


Рис. 6.5. Диаграмма образования погрешности измерения длительности интервала времени

$T_0$  — шаг дискретизации;  $\Delta t_1$  — обусловлено отсутствием синхронизации между счетчиком и генератором импульсов;  $\Delta t_2$  — погрешность дискретизации. Видно, что в данном примере

$$T_x = 7T_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2.$$

Таким образом, интервал  $\Delta t_1 + \Delta t_2$  оказывается неучтенным, причем  $\Delta t_1 + \Delta t_2 \leq 2T_0$ . Тогда относительная погрешность

$$\delta = \frac{2T_0}{T_x} 100\% = \frac{2T_0}{T_0 N_x} 100\% = \frac{2}{N_x} 100\%. \quad (6.8)$$

5. Наличие помех, которые  $mT_0 N_x$  складываются с мгновенным значением измеряемого напряжения.

Действие помех может быть устранено при измерении не мгновенного, а среднего за некоторый интервал времени значения измеряемого напряжения. Если время измерения взять кратным периоду помехи, то в результате усреднения значение помехи будет равно нулю. Этот принцип реализуется в интегрирующих времяимпульсных АЦП.

*Времяимпульсный интегрирующий метод* осуществляет преобразование не мгновенного, а среднего, за некоторый промежуток

времени значения измеряемого напряжения в код. В остальном принцип действия АЦП не отличается от предыдущего. Рассмотрим структурную схему и временную диаграмму одной из разновидностей интегрирующего АЦП (рис. 6.6).

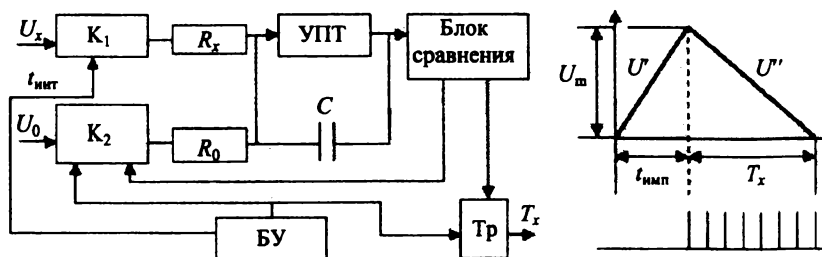


Рис. 6.6. Структурная схема времяимпульсного интегрирующего АЦП и его временная диаграмма

В схеме имеется операционный усилитель постоянного тока (УПТ), который выполняет интегрирование напряжения, поступающего на его вход. Параметры  $R_x$ ,  $C$ ,  $R_0$ ,  $t_{\text{инт}}$ ,  $U_0$  — постоянные величины.

Цикл измерения состоит из двух тактов. В первом измеряемое напряжение  $U_x$  подается на вход УПТ в течение времени, заданного длительностью импульса  $t_{\text{инт}}$ , формируемого в блоке управления (БУ). При этом напряжение на выходе интегратора  $U'$  нарастает по линейному закону

$$U' = \frac{1}{R_x C} \int_0^{t_{\text{инт}}} U_x dt, \quad (6.9)$$

где  $R_x$  — сопротивление на входе УПТ,  $C$  — емкость в цепи его обратной связи. В конце действия импульса это напряжение достигает значения  $U_m = \frac{U_x}{R_x C} t_{\text{инт}}$ .

Во втором такте действие управляющего импульса прекращается, ключ  $K_1$  закрывается, ключ  $K_2$  открывается и через сопротивление  $R_0$  на вход УПТ подается образцовое напряжение  $U_0$ . Этот момент времени фиксируется переключением триггера Тр. Поступающее на вход УПТ напряжение  $U_0$  имеет знак, противо-

положительный знаку измеряемого напряжения, поэтому с нового начала отсчета времени напряжение на выходе УПТ —  $U'$  будет определяться разностью

$$U'' = U_m - \frac{1}{R_0 C} \int_0^t U_0 dt. \quad (6.10)$$

В некоторый момент времени  $T_x$  это напряжение достигнет нулевого значения, т. е.  $U'' = U_m - \frac{1}{R_0 C} U_0 T_x = 0$ .

В этот момент блок сравнения вырабатывает сигнал, возвращающий триггер в исходное положение. Таким образом, на выходе триггера формируется прямоугольный импульс длительностью  $T_x$ . Подставив в это уравнение значение  $U_m$ , найдем время  $T_x$ , полученное на выходе триггера,

$$T_x = \frac{t_{\text{инт}} R_0}{R_x U_0} U_x. \quad (6.11)$$

Видно, что измеряемое напряжение (его среднее значение за время интегрирования в первом такте  $t_{\text{инт}}$ ) пропорционально интервалу времени  $T_x$ , который измеряется так же, как и в предыдущем методе, с помощью числа импульсов стабильной частоты  $f_0$ :  $N_x = f_0 T_x$ . Откуда, введя обозначение  $K = 1/(kf_0) = R_x U_0 / (f_0 t_{\text{инт}} R_0)$ , получим

$$U_x = \frac{N_x}{kf_0} = KN_x. \quad (6.12)$$

Если помехи имеют гармонический характер, а их периоды укладываются целое число раз во времени интегрирования, то их действие исключается, поскольку интеграл за период от синусоидальной функции равен нулю. Для исключения помехи промышленной частоты длительность интегрирования  $t_{\text{инт}}$  выбирают кратной периоду помехи.

*Кодоимпульсный метод преобразования* основан на сравнении измеряемой величины, например напряжения  $U_x$ , с образцовым компенсирующим напряжением  $U_k$ , изменяющимся скачкообразно по определенному закону.

Этот метод может быть реализован двумя способами:

1. *Способом ступенчатого изменения  $U_k$* , заключающемся в сравнении измеряемого напряжения  $U_x$  с рядом последовательно возрастающих (или убывающих) образцовых напряжений.

Проиллюстрируем способ временной диаграммой (рис. 6.7).

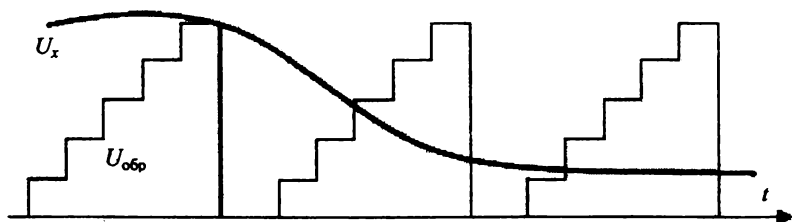


Рис. 6.7. Диаграмма формирования кода способом сравнения со ступенчато изменяющимся образцовым напряжением

Образцовое напряжение возрастает дискретно. Ступенька напряжения определяет разрешающую способность прибора. Происходит счет числа ступенек до выполнения условия  $U_k = U_x$ , при котором срабатывает сравнивающее устройство. Таким образом, кодом становится число ступенек.

2. *Способом взвешивания*, основанным на использовании преобразователей поразрядного кодирования, в которых измеряемое напряжение последовательно сравнивается с некоторой суммой образцовых напряжений.

Образцовые напряжения имеют значения, пропорциональные весам разрядов системы счисления. При использовании двоичной системы счисления ряд образцовых компенсирующих напряжений образуется из членов геометрической прогрессии

$$U_k = \Delta U_k (k_m 2^m + k_{m-1} 2^{m-1} + k_{m-2} 2^{m-2} + \dots),$$

где  $k_i$  могут принимать одно из двух значений 0, 1;  $\Delta U_k$  — размер напряжения единицы веса.

Рассмотрим пример преобразования конкретного напряжения  $U_x = 94,28$  В в 10-разрядный двоичный код с единицей низшего разряда  $2^{-3}$  В (рис. 6.8).

Так как вес низшего разряда задан, это  $0,125 = 2^{-3}$ , то все десятиразрядное число в общем представляется в виде

$$k_6 2^6 + k_5 2^5 + k_4 2^4 + k_3 2^3 + k_2 2^2 + k_1 2^1 + k_0 2^0 + k_{-1} 2^{-1} + k_{-2} 2^{-2} + k_{-3} 2^{-3}.$$



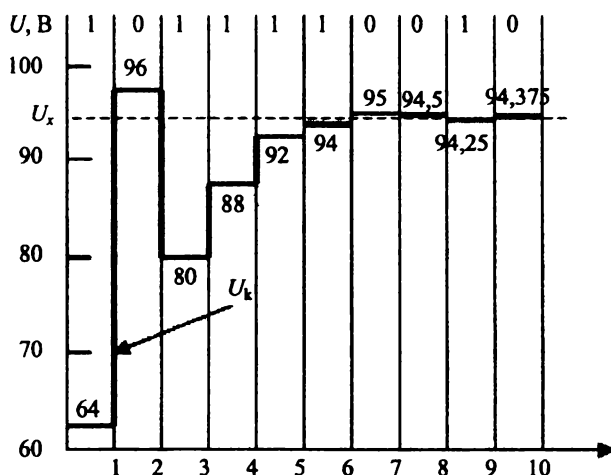


Рис. 6.8. Диаграмма формирования кода способом взвешивания

Цикл сравнения измеряемого напряжения с образцовым начинается с составляющей высшего разряда.

Составляющая высшего разряда — это  $2^6 \rightarrow 64$  В. Результат сравнения:  $U_x > U_k$ . Тогда в высшем разряде регистрируется единица. Использованное напряжение остается для образования следующего значения  $U_k$ , получаемого путем прибавления к нему напряжения, соответствующего следующему разряду. Это напряжение  $2^5 \rightarrow 32$  В, а новое значение  $U_k = 64$  В. Результат сравнения  $U_x < U_k$ , поэтому в этом разряде регистрируется 0, и это напряжение далее не участвует в образовании  $U_k$ . Тогда новое значение  $U_k$  формируется прибавлением напряжения следующего разряда. Это напряжение  $2^4 \rightarrow 16$  В, а новое значение  $U_k = 64 + 16 = 80$  В. Результат сравнения  $U_x > U_k$ , поэтому в данном разряде регистрируется 1, и это напряжение далее участвует в образовании  $U_k$ .

Затем, в соответствии с этим алгоритмом:

$2^3 \rightarrow 8$ В;	$U_k = 80 + 8 = 88$ В;	$U_x > U_k; \rightarrow 1;$
$2^2 \rightarrow 4$ В;	$U_k = 88 + 4 = 92$ В;	$U_x > U_k; \rightarrow 1;$
$2^1 \rightarrow 2$ В;	$U_k = 92 + 2 = 94$ В;	$U_x > U_k; \rightarrow 1;$
$2^0 \rightarrow 1$ В;	$U_k = 94 + 1 = 95$ В;	$U_x > U_k; \rightarrow 0;$
$2^{-1} \rightarrow 0,5$ В;	$U_k = 94 + 0,5 = 94,5$ В;	$U_x > U_k; \rightarrow 0;$

$$2^{-2} \rightarrow 0,25 \text{ В}; \quad U_k = 94 + 0,25 = 94,25 \text{ В}; \quad U_x > U_k; \rightarrow 1;$$

$$2^{-3} \rightarrow 0,125 \text{ В}; \quad U_k = 94,25 + 0,125 = 94,375 \text{ В}; \quad U_x > U_k; \rightarrow 0.$$

Так формируется двоичный код измеряемого напряжения: 101110010.

**Метод прямого преобразования аналоговой величины в число импульсов.** Из названия подраздела следует, что данные АЦП не содержат преобразователей измеряемой аналоговой величины в другую аналоговую величину, затем преобразуемую в цифровой код, как это было выше. Рассмотрим структурную схему и временную диаграмму работы одного из преобразователей, реализующих данный метод (рис. 6.9).

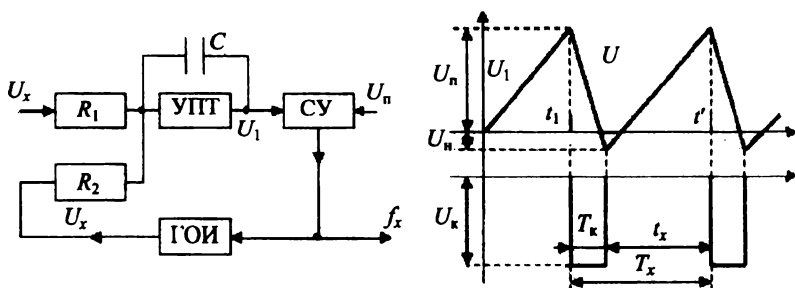


Рис. 6.9. Диаграмма формирования кода методом прямого преобразования в число импульсов

В схеме данного преобразователя используется интегрирующий усилитель постоянного тока (УПТ) с двумя входами. При подаче напряжений на оба входа осуществляется интегрирование их алгебраической суммы.

При подаче постоянного напряжения на один из входов, например, измеряемого постоянного напряжения  $U_x$ , напряжение на выходе УПТ —  $U_1$  будет линейно нарастать от нуля по закону:

$$U_1 = \frac{1}{R_1 C} \int_0^t U_x dt. \quad (6.13)$$

Далее  $U_1$  подается на вход СУ и сравнивается в нем с известным постоянным напряжением  $U_n$ . При достижении  $U_1 = U_n = \text{const}$  в сравнивающем устройстве СУ вырабатывается импульс, запускающий генератор образцового импульса ГОИ. Образцовый

импульс  $U_x$  прямоугольной формы и длительности  $T_x$ , полярности, обратной полярности  $U_x$ , поступает на второй вход УПТ. С этого момента времени  $t_1$  напряжение на выходе УПТ —  $U_2$  изменяется по закону

$$U_2 = U_n + \frac{1}{R_1 C} \int_{t_1}^{t_1+T_x} U_x dt - \frac{1}{R_2 C} \int_{t_1}^{t_1+T_x} U_x dt, \quad (6.14)$$

где  $U_n$  — достигнутый на выходе УПТ к  $t_1$  уровень, а выражение в фигурных скобках — это результат интегрирования обоих сигналов, поступающих на оба входа УПТ сигналов с учетом их знаков, от  $t_1$  до  $t_1+T_x$ .

Так как  $U_x$  всегда выбирается больше  $U_n$ , то полное напряжение  $U_2$  на выходе УПТ будет линейно спадать и по окончании действия образцового импульса  $T_x$  достигнет некоторого уровня  $U_n$ , который будет зависеть от соотношения  $U_x$  и  $U_n$ . На момент окончания  $T_x$ , т. е. при  $U_2 = U_n$ , получим

$$\frac{U_x T_x}{R_1 C} - \frac{U_x T_x}{R_2 C} = U_n - U_n. \quad (6.15)$$

После этого напряжение на выходе УПТ вновь будет нарастать по линейному закону (6.13), но не с нуля, а с  $U_n$ , пока снова не достигнет  $U_n$  в момент времени  $t'$ . Опять сработает СУ и образцовый импульс поступит на второй вход УПТ. В этот момент  $t'$  будет иметь место равенство  $U_1(t') = \frac{1}{R_1 C} \int_{t_1+T_x}^{t'} U_x dt = U_n - U_n$ . Откуда с учетом  $T_x + t_x = T_x$  получим

$$\frac{U_x T_x}{R_1 C} = U_n - U_n. \quad (6.16)$$

Сложив (6.15) и (6.16), найдем:  $\frac{U_x T_x}{R_1 C} - \frac{U_x T_x}{R_2 C} - \frac{U_x T_x}{R_1 C} = 0$ ,

откуда

$$T_x + t_x = \frac{U_x T_x R_1}{R_2 U_x}. \quad (6.17)$$

$T_k + t_x = T_x$  — период повторения процесса нарастания и спада выходного напряжения при  $U_x = \text{const}$ . Частота этого процесса

$$f_x = \frac{1}{T_x} = \frac{R_2}{U_k T_k R_1} U_x = k U_x, \quad (6.18)$$

т. е. частота  $f_x$  линейно связана с измеряемым напряжением. В качестве выходных импульсов используются сигналы со счетного устройства, запускающие ГОИ. Из временной диаграммы (см. рис. 6.9) видно, что частота этих сигналов равна  $f_x$ .

Далее частота следования импульсов преобразуется в код. Ниже представлена структурная схема такого преобразователя (рис. 6.10).

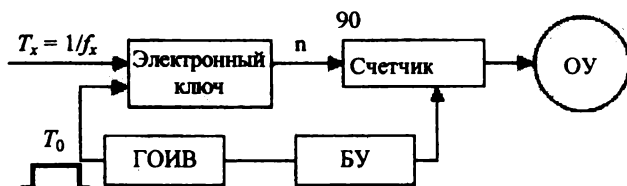


Рис. 6.10. Структурная схема преобразования частоты в код

Импульсы длительностью  $T_x$ , частота следования которых подлежит преобразованию, поступают на один из входов электронного ключа. На второй вход подается импульс образцовой длительности  $T_0$ , вырабатываемый генератором образцовых интервалов времени — ГОИВ. За время длительности образцового импульса  $T_0$  электронный ключ пропускает целое число импульсов, пропорциональное частоте

$$n_x = \frac{T_0}{T_x} = T_0 f_x. \quad (6.19)$$

Откуда

$$f_x = \frac{1}{T_0} n_x. \quad (6.20)$$

Таким образом,  $n_x$  представляет собой числовой код преобразованной частоты  $f_x$ , округленной до целого числа ступеней квантования  $q = 1/T_0$ . Поэтому выходным кодом преобразователя будет

$$N_{\text{кв}} = q n_x. \quad (6.21)$$

Электронный счетчик импульсов преобразует числоимпульсный последовательный код в показания цифрового отсчетного устройства.

Особый класс электроизмерительных приборов представляют собой устройства с компьютером в качестве выходного устройства. На начальном этапе внедрения в измерительную технику компьютер использовался в качестве дополнительного блока, т. е. прибор имел индикатор в аналоговом или в цифровом виде, но мог и сопрягаться с компьютером для записи сигналов, обработки информации и представления ее в виде графиков, таблиц, гистограмм. В современных приборах индикаторы не используются, и компьютер является единственным средством вывода информации. Такого рода приборы имеют, как правило, первичный преобразователь (датчик), аналого-цифровой преобразователь (АЦП) и компьютер. Поскольку информация в компьютер должна вводиться в виде кода, то такие приборы можно отнести к классу специфических цифровых приборов. Удобства использования компьютерного выхода в измерительных приборах очевидны: высокая помехоустойчивость, широкие возможности обработки и представления результатов, возможность передачи полученной информации по каналам связи. Более того, измерительные устройства на основе компьютеров способны управлять процессом измерения и в автоматическом режиме генерировать отчеты о проведенных измерениях.

#### **6.4. Информационно-измерительные системы и комплексы**

В ряде случаев измерения отдельных параметров специализированными приборами являются недостаточными. Например, для управления сложными технологическими процессами в режиме реального времени необходимо одновременно контролировать и анализировать большое количество разнородных физических параметров. В подобных случаях используют измерительные устройства, получившие название информационно-измерительные системы (ИИС).

В общем случае для решения названных задач ИИС должна включать следующие основные узлы:

- 1) комплект измерительных преобразователей, воспринимающих измеряемые величины;
- 2) коммутирующие устройства, предназначенные для поочередного подключения преобразователей к системе;
- 3) каналы связи (линии связи), соединяющие измерительные преобразователи с системой;
- 4) унифицирующие устройства, которые преобразуют измеряемые величины в единую физическую величину, а также осуществляют ее масштабирование;
- 5) измерительные устройства, выполняющие собственно измерительные операции (сравнение с мерой, квантование, кодирование и т. д.);
- 6) устройства математической и логической обработки измерительной информации, необходимые как для проведения расчетов при проведении косвенных или совокупных измерений, так и для предварительного анализа поступающих результатов измерений;
- 7) устройства хранения информации;
- 8) выходные или регистрирующие устройства, предназначенные для передачи информации человеку.

Поясним назначение некоторых основных узлов ИИС подробнее.

**Унифицирующие устройства.** Выходные сигналы первичных преобразователей многоканальных ИИС различаются и по роду, и по уровню. Так как в дальнейшем эти сигналы должны проходить обработку в общих узлах системы, то выходные сигналы необходимо унифицировать. Унифицированными сигналами, например, являются: напряжение постоянного тока 0—10 В, постоянный ток 0—5 мА, —5—+5 мА, 0—20 мА и т. д., напряжение переменного тока (50 или 400 Гц) 0—10 мВ, 0—1 В, 0—10 В и т. д.

**Коммутирующие устройства.** Эти устройства служат для временного разделения каналов. Основные характеристики: коэффициент передачи, быстродействие, или число переключений в секунду, число входных сигналов, максимальная частота коммутации каждого канала.

**Каналы связи, линии связи.** Под каналом связи понимают виртуальную линию, по которой передается информация от первичного преобразователя или унифицирующего устройства. В то же время реальные сигналы передаются по физическим линиям связи. В качестве линий связи используют проводные, воздушные или кабельные, а также беспроводные, т. е. радиолинии.

В качестве линий связи используют как специальные линии, так и имеющиеся телефонные, телеграфные или линии электропередачи. В этих случаях необходимы особые устройства, исключающие влияние на измерительный сигнал основного сигнала данной линии.

В одной линии связи можно создать несколько каналов связи, обеспечивающих независимую передачу информации. В этом случае на передающей стороне должно быть устройство уплотнения каналов, собирающее информацию со всех измерительных преобразователей, а на приемной стороне — устройство разделения каналов.

Проводные линии используют для передачи относительно низкочастотных сигналов, поскольку повышение частоты приводит к излучению энергии и увеличению затухания сигнала. Радиолинии используют для передачи высокочастотных сигналов, а также в случае удаленности, труднодоступности либо подвижности объекта контроля.

Линии связи являются источником дополнительных погрешностей из-за влияния внешних помех или параметров самой линии, которые зависят от изменения окружающих условий: температуры, влажности и т. д. Помехоустойчивость повышается при использовании частотной модуляции передаваемых сигналов либо при переходе к кодоимпульсной модуляции, т. е. цифрованию сигналов.

**Запоминающие устройства (ЗУ).** Необходимы для хранения информации. Основными характеристиками ЗУ являются: емкость, скорость записи и выборки данных. Современные ЗУ выполняют на полупроводниковых, магнитных или магнитооптических элементах.

**Выходные устройства.** Служат для наблюдения или фиксации результатов измерений в виде звуковой, световой сигнализации, показаний цифровых или стрелочных приборов, графиков

на бумажных носителях либо в виде изображения на экране монитора.

При создании ИИС широко используется агрегатно-блочный принцип комплектования из отдельных узлов или блоков. Широкое внедрение стандартизации как на уровне выполнения узлов, так и на уровне сигналов и условий их передачи позволяет создавать гибкие, быстро перенастраиваемые ИИС и повышает эффективность их использования.



## Глава 7

# ИЗМЕРЕНИЕ МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН

### 7.1. Магнитные характеристики вещества и поля

Под магнитными измерениями понимают область измерительной техники, имеющей своей целью измерение величин, характеризующих магнитное поле и магнитные свойства вещества.

Магнитные измерения широко используются в различных областях: в фундаментальных исследованиях физики твердого тела, разработке новых функциональных материалов, электротехнике, радиотехнике, неразрушающем контроле свойств материалов, геофизике, физике космоса и элементарных частиц, а также в биологии и медицине.

Важное место в процессе магнитных измерений занимает создание магнитного поля. Поэтому изучение устройств создания магнитного поля, расчета и измерения поля в них также является задачей магнитных измерений.

Процесс измерения магнитных величин имеет несколько аспектов:

- 1) физический принцип, лежащий в основе измерения;
- 2) конкретный метод, реализующий тот или иной принцип;
- 3) средства измерения, используемые при реализации метода;
- 4) метрологическое обеспечение результатов измерения.

Для измерения магнитных свойств используют различные физические проявления, связанные с намагничиванием тел: механические, электрические, оптические. При этом непосредственно измеряемый сигнал есть результат преобразования собственно магнитной величины в устройстве, называемом *первичным преобразователем*. Связь между магнитной величиной и измеряемым сигналом задается *функцией преобразования* преобразователя. Часто функция преобразования линейна, т. е.  $Y = f(X) = kX$ .

Однако существует большое количество преобразователей, для которых эта связь является более сложной.

### 7.1.1. Магнитное поле и магнитная индукция

Теоретическим фундаментом электромагнитных процессов, а значит, и измерительных преобразований служат уравнения Максвелла. Они включают четыре основных уравнения и дополняются тремя материальными уравнениями и для СИ имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= j + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; & \vec{B} &= \varphi(\vec{H}); \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & \vec{D} &= \chi(\vec{E}); \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho; & j &= \psi(\vec{E}). \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Здесь векторы  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  — напряженность и индукция магнитного поля, векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  — напряженность и индукция электрического поля,  $\rho$ ,  $j$  — плотности электрических зарядов и электрического тока,  $\varphi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$  — функции, описывающие анизотропные и нелинейные свойства среды.

К числу магнитных характеристик поля и среды относятся векторы  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  и тензор  $\varphi$ , они и подлежат определению. На практике непосредственному определению подлежат скалярные величины, по которым и судят о соответствующих параметрах. Например, при определении  $\vec{B}$  непосредственному измерению подлежат модуль  $|\vec{B}|$ , составляющие  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$ , а также их производные  $\frac{\partial B_i}{\partial l_i}$  ( $i$  —  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), характеризующие неоднородность вектора магнитной индукции. При определении тензора  $\varphi$  необходимо измерить все его компоненты.

### 7.1.2. Единицы измерения индукции и напряженности магнитного поля

Единицы измерения физических величин определяются методами их измерения.

Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  фигурирует сразу в двух фундаментальных законах, которые положены в основу методов его измерения:

1. *Закон Ампера* — закон, который устанавливает характер силового взаимодействия магнитного поля с током. В дифференциальной форме закон имеет вид

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (7.2)$$

В этом законе индукция магнитного поля  $\vec{B}$  выступает в качестве аргумента, определяющего функцию — силу, действующую на элемент проводника с током в магнитном поле. Другими словами, индукция магнитного поля выступает в качестве реальной причины возникновения силы, действующей на проводник. Поскольку сила может быть измерена, то и вектор индукции магнитного поля может быть определен путем непосредственного измерения силы.

Из формулы закона (7.2) видно, что единицей измерения магнитной индукции, определенной этим способом, является «Ньютон на Ампер · метр», или «Тесла»:

$$[B] = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = 1 \text{ Тл}.$$

Разновидностью этой методики является определение вектора магнитной индукции по измерению механического вращающего момента, действующего на контур с током. Действительно, путем интегрирования левой и правой частей в законе Ампера и перехода от механической силы к механическому моменту можно получить иную форму записи закона Ампера:

$$\vec{P} = \vec{M} \times \vec{B}, \quad (7.3)$$

где  $\vec{P}$  — механический момент, действующий со стороны магнитного поля с индукцией  $\vec{B}$  на магнитный момент  $\vec{M} = I \vec{s}$

контура или тела, несущего макроскопические или микроскопические токи.

2. Закон электромагнитной индукции демонстрирует другое проявление магнитного поля и в интегральной форме имеет вид

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s}. \quad (7.4)$$

Левая часть есть не что иное, как ЭДС, наводимая в контуре  $L$  изменяющимся во времени магнитным потоком  $\Phi$ , пронизывающим контур. Поэтому закон можно записать в виде

$$e = -\frac{d}{dt} \Phi. \quad (7.5)$$

Здесь так же, как и ранее, магнитная индукция является аргументом, а ЭДС — функцией. Так как ЭДС может быть непосредственно измерена, то и магнитная индукция может быть определена (через определение  $\Phi$ ) путем измерения ЭДС в контуре. В этом способе измерения единицей магнитной индукции также является «Тесла»:

$$[B] = 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = 1 \text{ Тл}.$$

Заметим, что единица магнитной индукции, выраженная через основные единицы SI, одинакова для обоих способов измерения ( $\dim B = \text{MT}^{-2}\text{I}^{-1}$ ).

Отметим также, что единицей магнитного потока является «Вебер»:

$$[\Phi] = 1 \text{ В} \cdot \text{с} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2 = 1 \text{ Вб}.$$

Таким образом, индукция магнитного поля является измеряемой величиной; для обнаружения магнитного поля и определения магнитной индукции непосредственному измерению подлежат *механическая сила, механический момент и электродвижущая сила*.

Магнитное поле  $\vec{H}$ , как следует из уравнений Максвелла, порождается электрическим током. Фундаментальный закон, связывающий магнитное поле и электрический ток, — это закон Био — Савара — Лапласа. В дифференциальной форме он имеет вид

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (7.6)$$

Закон устанавливает величину напряженности магнитного поля, созданного элементом тока  $I \vec{dl}$  в точке, определяемой радиус-вектором  $\vec{r}$ . Из закона следует, что единицей измерения напряженности магнитного поля в СИ является «Ампер на метр»:

$$[H] = 1 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Видно также, что напряженность магнитного поля является функцией, а аргументом, т. е. причиной, порождающей магнитное поле, является сила тока. Ток может быть измерен, но величина напряженности магнитного поля может быть только рассчитана по измеренному току.

Таким образом, напряженность магнитного поля является расчетной величиной, она не измеряется, а рассчитывается по измеренной величине силы тока.

Итак, если у нас имеется устройство для создания магнитного поля, то его напряженность мы можем рассчитать по силе тока, а индукцию магнитного поля в вакууме или среде можем измерить.

*Магнитная индукция и поле* (напряженность поля) связаны материальным уравнением  $\vec{B} = \mu(\vec{H})$ , для вакуума эта связь имеет наиболее простой вид:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}. \quad (7.7)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$  — магнитная константа. Для среды уравнение связи содержит еще относительную проницаемость  $\mu$  (см. ниже), безразмерную величину, показывающую, во сколько раз индукция поля в среде отличается от таковой в вакууме.

Введение магнитной константы потребовалось для электромагнитных величин при переходе от CGS к SI. В системе CGS индукция магнитного поля в вакууме и напряженность суть одно и то же:  $B_0 = H$ , размерности их совпадают, хотя названия единиц измерения звучат по-разному (1 Гс и 1 Э). При переходе к SI индукция и поле оказались величинами с разной размерностью, поэтому  $\mu_0$ , согласующая их размерности, также является размерной. Величина и размерность  $\mu_0$  были найдены в SI в результате сопряжения механических величин с электрическими.

### 7.1.3. Магнитные параметры намагничиваемых сред

Намагничиваемыми средами можно назвать такие среды, которые, будучи помещены в магнитное поле, приобретают вследствие магнитной поляризации магнитный момент.

**Магнитный момент.** Формально следуя аналогии с электрической поляризацией, электрическими зарядами и дипольным моментом, вводят понятие магнитных зарядов, но это понятие «фиктивное», так как в природе раздельно существующих магнитных зарядов не существует (не обнаружено).


Итак, вследствие магнитной поляризации тело приобретает магнитный момент (см. схему), который, следуя упомянутой аналогии, можно представить и записать следующим образом:



$$\vec{M} = m \cdot \vec{l}, \quad (7.8)$$

где  $m$  — магнитный заряд.

С другой стороны, со времен гипотезы молекулярных токов Ампера и по сей день принято объяснять возникновение магнитного момента как результат выстраивания элементарных атомных магнитных моментов. При этом магнитный момент выражается как магнитный момент витка с током (см. схему):



$$\vec{M} = I \cdot \vec{s}, \quad (7.9)$$

где  $I$  — сила тока,  $s$  — площадь витка.

Тогда с учетом обоих выражений единицы измерения магнитного момента и магнитного заряда легко устанавливаются:

$$[M] = 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2, \quad [m] = 1 \text{ А} \cdot \text{м}.$$

**Намагниченность.** Интенсивность намагничивания тела принято определять с помощью магнитного момента единицы объема тела. Для однородно намагниченного тела намагниченность

$$\vec{J} = \frac{\vec{M}}{V}, \quad (7.10)$$

откуда  $[J] = 1 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$

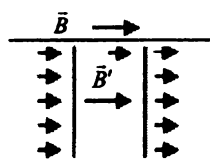
Заметим, что в СИ единицы измерения намагниченности и напряженности поля одинаковы (и то, и другое создается токами).

В свою очередь намагниченность, являясь откликом среды на воздействие поля, связана с величиной поля через характеристику среды  $\chi$  — *магнитную восприимчивость*, которая в общем случае является тензорной величиной, отражая неоднородность среды, а для сильномагнитных веществ является функцией приложенного поля:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (7.11)$$

где  $\chi$  является безразмерной величиной.

**Магнитная индукция.** Таким образом, при воздействии магнитного поля, измеряемой характеристикой которого является индукция, вещество приобретает магнитный момент, или намагничивается (см. схему). Возникает вопрос: а какова индукция



магнитного поля в веществе  $B$  (напомним, что в вакууме это  $B_0$ ). Поскольку  $B$  — это измеряемая характеристика, то при соблюдении некоторых условий ее можно внутри вещества измерить. Последовательное рассмотрение показывает, что для

таких измерений необходимо использовать дискообразную полость в среде. В результате поляризации диполи располагаются так, что одна плоскость полости будет иметь положительный магнитный заряд, а другая отрицательный, тогда в полости будет существовать магнитное поле с индукцией  $\vec{B}'$ , созданное диполями среды, которое определяется степенью поляризации или намагниченностью. Тогда так же, как для  $B_0$  имели  $B_0 = \mu_0 H$ , для  $\vec{B}'$  получаем

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}. \quad (7.12)$$

Очевидно, что полная индукция магнитного поля в среде есть результат сложения  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ , или

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}). \quad (7.13)$$

Отметим, что в скобке стоит сумма величин с одинаковой размерностью и последняя формула задает связь между индукцией, полем и намагниченностью.

С учетом выражения для  $J$  получаем

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} (1 + \chi) = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (7.14)$$

где  $\mu = 1 + \chi$  есть относительная магнитная проницаемость среды, безразмерная величина. Часто выражение для  $\vec{B}$  записывают также в виде:

$$\vec{B} = \mu_{\text{вс}} \vec{H}, \quad (7.15)$$

где  $\mu_{\text{вс}} = \mu_0 \mu$  есть абсолютная магнитная проницаемость, Гн/м.

В литературе можно встретить примеры измерения намагниченности в Тл, при этом следует иметь в виду, что в этом случае речь идет о величине  $\mu_0 \vec{J} = \vec{B}'$ , которая действительно имеет единицу измерения «Тесла». Аналогично при указании единиц поля — Тл имеется в виду величина  $\mu_0 \vec{H} = \vec{B}$ , для воздуха  $\mu = 1$ .

В области электромагнетизма по-прежнему широко распространено использование единиц CGS, поэтому приведем переводные коэффициенты из SI в CGS для основных магнитных величин:

$$\begin{aligned} B: \quad 1 \text{ Тл} &= 10^4 \text{ Гс}; \\ J: \quad 1 \text{ А/м} &= 10^{-3} \text{ Гс}; \\ H: \quad 1 \frac{\text{А}}{\text{м}} &= \frac{4\pi}{10^3} \text{ Э}. \end{aligned}$$

#### 7.1.4. Другие магнитные характеристики сильномагнитных веществ и материалов

В сильномагнитных веществах наблюдается ряд специфических явлений, таких как спонтанная намагниченность, магнитные фазовые переходы, доменная структура, гистерезис, высокая магнитная проницаемость, магнитокристаллическая и наведенная анизотропия, магнитострикция. Определение параметров, характеризующих эти явления, также является задачей магнитных измерений. К числу сильномагнитных веществ можно отнести ферромагнетики, ферри- и антиферромагнетики.

При нагревании в магнитоупорядоченных веществах наблюдается магнитный фазовый переход к неупорядоченному состоянию, характеристикой которого является температура перехода — *температура Кюри* для ферромагнетиков и *температура Нееля* для антиферромагнетиков. При  $T < T_c$  в магнетиках возникает *спонтанная намагниченность*  $J_s$ .



При намагничивании на изменение магнитного состояния вещества затрачивается энергия, которая при прочих равных условиях зависит от направления намагничивания внутри вещества. Это явление называется *магнитной анизотропией*. Количественно оно характеризуется набором констант анизотропии, определяющих удельные затраты энергии.

При намагничивании сильномагнитных веществ наблюдается изменение их размеров и формы — явление *магнитострикции*. Это явление характеризуется полевой зависимостью относительного изменения размеров и набором соответствующих констант.

При намагничивании сильномагнитных веществ в области технического намагничивания наблюдается отставание изменения намагниченности от изменения магнитного поля — *магнитный гистерезис*.

Гистерезис характеризует необратимые потери энергии источника, диссипация энергии возможна за счет различных механизмов. При циклическом изменении поля изменение магнитного состояния следует по замкнутой кривой, называемой петлей гистерезиса (7.1 а). Основными характеристиками петли являются

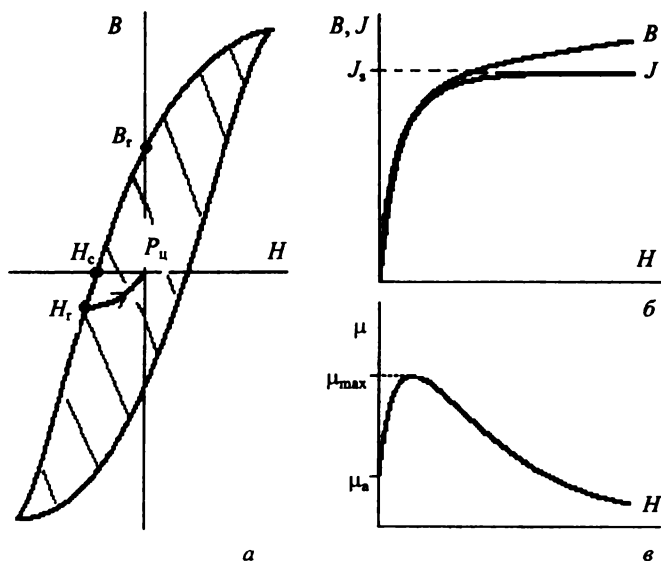


Рис. 7.1. Статическая петля гистерезиса (а), кривая намагничивания (б) и полевая зависимость магнитной проницаемости (в)

площадь, заключенная внутри петли и определяемая потерями энергии  $P_{\text{ц}}$ , а также остаточная индукция  $B_r$  и коэрцитивная сила  $H_c$ . Другой интегральной характеристикой вещества в этой области является основная или коммутационная *кривая намагничивания* (7.1 б), а также параметры, ее характеризующие, — *начальная*  $\mu_a$  и *максимальная*  $\mu_{\text{max}}$  *проницаемости* (7.1 в). При этом зависимости  $B(H)$  и  $J(H)$  отличаются тем, что первая из них с увеличением поля только возрастает, а вторая достигает насыщения.

### 7.1.5. Условия проведения измерений

Для проведения измерений используют образцы из исследуемого материала. Для получения достоверных результатов образцы должны удовлетворять ряду требований к их форме, условиям намагничивания, размагничивания и др.

Образцы могут быть замкнутой или разомкнутой формы в зависимости от целей измерения, при этом образцы замкнутой формы позволяют судить о свойствах вещества, а не только образца.

Размагничивание образцов, т. е. получение состояния с  $B = 0$  при  $H = 0$ , необходимо, чтобы устранить влияние их магнитной предыстории на результаты измерений. Существуют два основных способа размагничивания:

1. Переменным магнитным полем с убывающей до нуля амплитудой. В этом способе существенную роль играет выбор частоты размагничивания. Это обусловлено существованием магнитного скин-эффекта, ограничивающего глубину проникновения поля в ферромагнитную среду. Важен и выбор времени размагничивания, поскольку при недостаточном времени образец может сохранить состояние остаточной намагниченности. Кроме того, в образцах с полосовой доменной структурой частота размагничивания может определять количество доменных границ, сохраняющихся в образце после размагничивания, оказывая влияние на параметры начального намагничивания образца. В этом способе максимальная амплитуда поля должна превышать коэрцитивную силу образца в 10—50 раз.

2. Нагреванием образца выше температуры Кюри и охлаждением в условиях, исключающих влияние внешних полей. Применение этого способа ограничено возможными изменениями структуры исследуемого образца при нагревании.

Размагничивание возможно также уменьшением магнитного поля из состояния релаксационной коэрцитивной силы  $H_r$  (рис. 7.1 а), однако для этого  $H_r$  должна быть предварительно определена.

Для стабилизации магнитных свойств после размагничивания необходимо выждать некоторое время, длительность которого зависит от типа материала и вида размагничивания. Например, для образцов сплава Fe — Si после размагничивания переменным полем это время составляет 10 мин.

Намагничивание образцов следует проводить в устройствах, обеспечивающих создание однородного поля, что наряду с их формой должно обеспечивать однородность намагничивания.

При проведении измерений следует исключить влияние внешних магнитных полей, например, поля Земли, механических воздействий и температуры. Для исключения влияния внешних полей образец помещают в магнитный экран. Влияние внешнего постоянного магнитного поля компенсируют с помощью дополнительной обмотки, а уменьшить его влияние можно ориентацией намагничивающего устройства с образцом перпендикулярно горизонтальной составляющей лабораторного поля (например, поля Земли, для которого  $H_{31} \sim 0,5$  Э). Для исключения влияния механических воздействий образец исследуемого материала помещают в футляр, на который наносят измерительную и намагничивающую обмотки. Для исключения влияния изменения температуры на результат измерения в некоторых случаях создают дополнительную систему термостабилизации.

При изготовлении образцов следует также обеспечить контроль за идентичностью химического и фазового состава образцов и собственно исследуемого материала.

## **7.2. Магнитные цепи, образцы, устройства намагничивания**

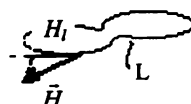
### **7.2.1. Общие положения теории магнитных цепей**

Образцы исследуемого материала вместе с источниками магнитного поля и устройствами для проведения магнитного потока образуют магнитные цепи.

Подобно тому, как электрическая цепь служит для прохождения электрического тока, так и магнитная цепь служит для прохождения магнитного потока. Устройства для проведения магнитного потока — магнитопроводы — изготавливают из магнитно-мягких материалов. Их магнитная проницаемость многократно превосходит проницаемость воздуха  $\left( \frac{\mu_{\text{м.пр}}}{\mu_{\text{возд}}} \sim 10^3 \div 10^7 \right)$ , благода-

ря чему поток сосредотачивается в магнитной цепи. Также по аналогии при расчете магнитных цепей используют родственное ЭДС понятие магнитодвижущей силы (МДС). Источниками МДС являются катушки с током или постоянные магниты.


Магнитодвижущую силу определяют как циркуляцию вектора магнитного поля по замкнутому контуру:



$$F = \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H_l dl, \quad (7.16)$$

где  $H_l$  — компонента магнитного поля, направленная вдоль элемента  $d\vec{l}$  контура  $L$  (см. схему).

При анализе магнитных цепей широко используют так называемый закон полного тока. По закону полного тока циркуляция магнитного поля вдоль некоторого замкнутого контура равна полному току  $I$ , который проходит через поверхность, ограниченную этим контуром (см. схему):



$$\oint_L H_l dl = \sum_i I_i. \quad (7.17)$$

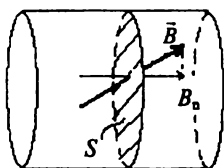
Если контур совпадает с силовой линией магнитного поля и напряженность поля во всех точках контура постоянна, то  $H_l = H$ . В этом случае из (7.16) и (7.17) для МДС следует

$$F = H \oint_L dl = \sum_i I_i. \quad (7.18)$$

Видно, что единица измерения МДС совпадает с единицей силы тока — 1 А.

Таким образом, возбуждение магнитного потока в цепи осуществляется магнитодвижущей силой.

*Магнитный поток* через участок магнитной цепи, содержащей ферромагнитный материал, определяется как



$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{s} = \int_S B_n ds, \quad (7.19)$$

где  $B_n$  — компонента магнитной индукции, перпендикулярная элементу поверхности внутри ферромагнетика  $d\vec{s}$  (см. схему).

Единица измерения магнитного потока в СИ —  $1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2 = 1 \text{ Вб}$ .

Строгий расчет магнитной цепи возможен при использовании методов расчета электромагнитного поля. Для приближенных расчетов применяют закон полного тока и закон Ома для магнитной цепи — аналог соответствующего закона для электрической цепи. Получим закон для замкнутой магнитной цепи, задающий зависимость  $\Phi = f(F)$ , полагая следующее:

1) магнитная индукция однородна и перпендикулярна поперечному сечению ферромагнетика, тогда  $\Phi = BS$ ;

2) магнитный поток постоянен вдоль магнитной цепи:  $\Phi = \text{const}$  (означает, что рассеяние потока отсутствует).

Принимая во внимание, что  $B = \mu_0 H$ , а значит,  $\Phi = \mu_0 HS$ , получим:  $H = \frac{\Phi}{\mu_0 S}$ . Учитывая, что из (7.18) имеем  $H = \frac{F}{\oint dl}$ ,

получим выражение закона для магнитной цепи:

$$\Phi = \frac{F}{\oint \frac{dl}{\mu_0 S}} = \frac{F}{R_m}, \quad (7.20)$$

где  $R_m$  носит название магнитного сопротивления цепи.

Выражение (7.20) называют также законом Ома для магнитной цепи. Из (7.20) видно, что для получения наибольшего магнитного потока при заданной МДС магнитное сопротивление цепи должно быть минимальным. Малые магнитные сопротивления магнитопроводов обеспечивают применение ферромагнитных магнитомягких материалов, которые обладают большими значениями магнитной проницаемости.

Для расчетов в разветвленных магнитных цепях используют аналоги первого и второго законов Кирхгофа.

**Первый закон Кирхгофа:** алгебраическая сумма магнитных потоков в точке разветвления равна нулю:

$$\sum_i \Phi_i = 0. \quad (7.21)$$

Этот закон непосредственно вытекает из непрерывности магнитного потока в магнитной цепи. Действительно, если в данную точку магнитной цепи поступает магнитный поток, то при выходе из этой точки его значение в силу непрерывности не может оказаться иным.

**Второй закон Кирхгофа** гласит, что МДС магнитной цепи является алгебраической суммой МДС на отдельных участках цепи:

$$F = \sum_i F_i. \quad (7.22)$$

Этот закон есть прямое следствие закона сохранения энергии.

### 7.2.2. Образцы и анализ магнитных цепей

Итак, образцы вместе с приспособлениями, через которые замыкается магнитный поток, образуют магнитные цепи. Различают три основных вида магнитных цепей: замкнутые, частично замкнутые и разомкнутые. При проведении измерений основная проблема состоит в определении напряженности поля, действующего на образец.

#### 7.2.2.1. Замкнутая магнитная цепь

*Замкнутой называют магнитную цепь*, в которой отсутствуют участки из материалов с магнитной проницаемостью меньшей, чем магнитная проницаемость материала образца.

При определении магнитных свойств использование замкнутой магнитной цепи позволяет получить наиболее точные результаты, а для высокопроницаемых материалов это является единственным приемлемым способом.

*Кольцо, тороид, рамка* — распространенные виды образцов, обеспечивающие измерение в замкнутой магнитной цепи.

Циркулярное намагничивание таких образцов осуществляют двумя способами: с помощью линейного проводника с током, либо пропусканием тока по обмотке образца с равномерно распределенными витками.

*Магнитное поле линейного проводника с током* в силу симметрии задачи определяется достаточно просто. Если проводник проходит через ось кольца (рис. 7.2), то напряженность магнитного поля в любой точке контура  $L$ , совпадающего с окружностью радиуса  $r$ , например равного среднему радиусу кольца ( $r_{\text{ср}}$ ), одинакова и направлена по касательной.

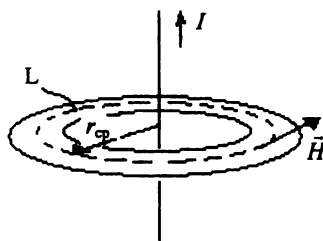


Рис. 7.2. Намагничивание образца замкнутой формы линейным проводником с током

Воспользовавшись законом полного тока в форме (7.18), получим

$$H_{\text{ср}} = \frac{\sum_i I_i}{\oint dl} = \frac{I}{L} = \frac{I}{2\pi r_{\text{ср}}} \quad (\text{А/м}), \quad (7.23)$$

где  $L$  — длина магнитной силовой линии радиуса  $r$ . Данная формула справедлива для бесконечно длинного проводника, при любых  $r \gg r_0$ , т. е. много больших радиуса самого проводника. Однако этой формулой можно пользоваться и при конечной длине проводника, если длина проводника много больше  $r_{\text{ср}}$ . Данное условие необходимо, чтобы исключить влияние поперечного подмагничивания полем подводящих проводников. Практически конечностью длины провода можно пренебречь при соблюдении следующих соотношений: длина прямолинейной части провода должна быть  $l \geq 20 r_{\text{ср}}$ , а подводящие провода находиться от образца не ближе, чем  $10 r_{\text{ср}}$ .

Напряженность магнитного поля тороидальной катушки с равномерно распределенной обмоткой из  $w$  витков определяется аналогичным образом.

Проведем замкнутый контур в виде окружности радиуса  $r_{\text{ср}}$  (рис. 7.3). Поверхность, ограниченную контуром  $L$ , пронизывают все  $w$  проводов с токами  $I$  в каждом, текущими в одном направлении. Тогда полный ток, пронизывающий поверхность, ограниченную контуром, составляет  $wI$ .

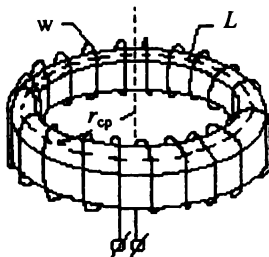


Рис. 7.3. Намагничивание образца замкнутой формы обмоткой с током

Так как напряженность магнитного поля во всех точках контура одинакова и направлена по касательной, то циркуляция вектора магнитного поля вдоль контура равна  $HL$ . В этом случае из закона полного тока (7.18) имеем

$$H_{\text{ср}} = \frac{\sum_i I_i}{\oint dl} = \frac{wI}{L} = \frac{wI}{2\pi r_{\text{ср}}}, \text{ А/м}. \quad (7.24)$$

В обоих рассмотренных случаях, строго говоря, намагничивающее поле является неоднородным. По внутреннему периметру образца поле больше, а по внешнему меньше. Для точек на любой другой окружности, радиус которой отличается на  $x$  от  $r_{\text{ср}}$ , т. е.  $r = r_{\text{ср}} \pm x$ , легко получить

$$H_x = \frac{wI}{2\pi(r_{\text{ср}} \pm x)} = \frac{H_{\text{ср}}}{1 \pm \frac{x}{r_{\text{ср}}}}. \quad (7.25)$$



Очевидно, что чем меньше  $x/r_{\text{ср}}$  по сравнению с единицей, тем ближе  $H_x$  и  $H_{\text{ср}}$  и тем меньше неоднородность намагничивающего поля.

Для уменьшения погрешности в определении поля рекомендуется, чтобы соотношение внешнего и внутреннего радиусов образца удовлетворяло условию  $\frac{r_{\text{н}} - r_{\text{в}}}{r_{\text{ср}}} \leq 0,1$ . В нормативных документах это требование выражено соотношением  $\frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{в}}} > 1,3$ .

Другим способом уменьшения данной погрешности является использование для расчетов напряженности поля не среднего, а так называемого *гармонического радиуса*:

$$r_{\text{г}} = \frac{r_{\text{н}} - r_{\text{в}}}{\ln \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{в}}}}. \quad (7.26)$$

Понятие *гармонического радиуса* возникло из определения средней напряженности поля путем интегрирования по всем контурам от  $r_{\text{в}}$  до  $r_{\text{н}}$ .

В замкнутых образцах из высокопроницаемых материалов, приготовленных в виде набора колец или путем навивки из тонкой ленты, необходимо учитывать влияние межвитковых воздушных зазоров, которое становится заметным при  $\mu \geq 10^5$ . В этих случаях *расчет площади поперечного сечения* образца, необходимой при определении магнитной индукции, следует проводить, исходя из массы магнитного материала, а не из его геометрических размеров.

#### 7.2.2.2. Частично замкнутая магнитная цепь

Условия измерения, близкие к замкнутой магнитной цепи, реализуются при составлении магнитной цепи в виде квадрата из образцов разомкнутой формы в виде полос или в пермеатрах различных конструкций, магнитная цепь которых состоит из образца и магнитопровода. Подобные цепи включают участки, отличающиеся по магнитной проницаемости от проницаемости образца.

Магнитные цепи, которые помимо образца содержат участки с проницаемостью, меньшей проницаемости образца, называют частично замкнутыми.

**Пермеаметр.** На рис. 7.4 представлена схема простейшего пермеаметра. Проведем анализ магнитной цепи этого пермеаметра.

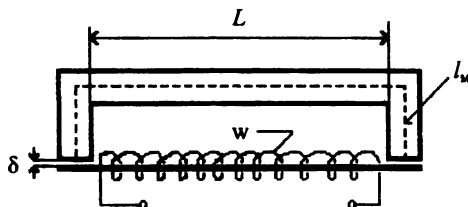


Рис. 7.4. Конструкция и магнитная цепь пермеаметра

Разобьем магнитную цепь на однородные участки, каждый из которых имеет одинаковое сечение по длине и выполнен из определенного материала:

— образец длиной  $l_{об}$  с магнитной проницаемостью  $\mu$  и поперечным сечением  $S_{об}$ , помещенный в намагничивающую обмотку с числом витков  $w$ ;

— магнитопровод из магнитомягкого материала с соответствующими параметрами  $l_m$ ,  $\mu_m$ ,  $S_m$ ;

— воздушный зазор между образцом и магнитопроводом длиной  $l_z = 2\delta$ , сечением  $S_z$  и относительной проницаемостью  $\mu = 1$ .

Полагая, что рассеяние потока отсутствует, из закона для магнитной цепи (7.20) и закона полного тока (7.17), переходя от интегрирования к суммированию по однородным участкам цепи, получим

$$\Phi = \frac{wI}{\oint_L \frac{dl}{\mu\mu_0 S}} = \frac{wI}{\frac{l_{об}}{\mu\mu_0 S} + \frac{l_m}{\mu_m\mu_0 S_m} + \frac{l_{вз}}{\mu_0 S_{вз}}} . \quad (7.27)$$

Это выражение называют формулой Гопкинсона для неразветвленной магнитной цепи.

Для напряженности поля в частично замкнутой цепи, учитывая, что  $\Phi = BS = \mu\mu_0 HS$ , имеем  $H = \frac{\Phi}{\mu\mu_0 S}$ , или

$$H = \frac{wI}{l_{о6} \left(1 + \frac{l_{м} \mu_{о6} S_{о6}}{l_{о6} \mu_{м} S_{м}} + \frac{l_{вз} \mu_{о6} S_{о6}}{l_{о6} S_{вз}}\right)} = \frac{wI}{l_{о6} (1 + A)}. \quad (7.28)$$

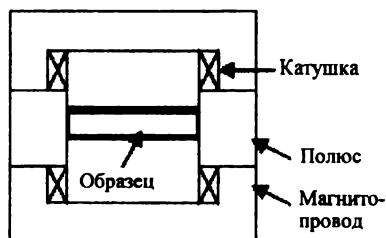
Поправка  $A$ , обусловленная вкладом магнитопровода и воздушного зазора в магнитное сопротивление цепи, должна быть малой; раскладывая выражение (7.28) в ряд и ограничиваясь первым членом разложения, получаем

$$H = \frac{wI}{l_{о6}} (1 - A). \quad (7.29)$$

Обратим внимание на то, что наличие магнитопровода и воздушного зазора снижает магнитное поле в образце по сравнению с замкнутой цепью. Напряженность магнитного поля может определяться по току в намагничивающей обмотке при условии, что предварительно рассчитанная поправка составляет не более 1 %. Поправка  $A$  зависит от соотношения длин, проницаемостей и сечений участков цепи.

Для уменьшения поправки  $A$  магнитопровод должен быть небольшой длины, большого сечения и с высокой проницаемостью, зазоры — минимальной длины и максимально возможного сечения. Для получения более надежных результатов по величине поля его следует определять экспериментально.

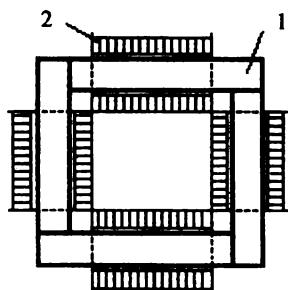
В других типах пермеаметров намагничивающая катушка может располагаться на магнитопроводе либо пермеаметр устроен



подобно электромагниту и образец зажимается между его полюсами (см. схему). В этом случае намагничивание образца осуществляется посредством магнитопровода или полюсов, и напряженность поля можно определить только путем измерения.

**Квадратная магнитная цепь.** Получила распространение при изучении листовых образцов магнитомягких материалов. Магнитная цепь образуется из четырех одинаковых полосовых

образцов — 1, соединенных «встык — внахлестку» (см. схему). Намагничивающее устройство состоит из четырех одинаковых катушек — 2, соединенных последовательно, внутрь которых помещены образцы. Анализ такой магнитной цепи аналогичен проведенному выше. Однако в данной цепи наряду с образованием



в местах стыков воздушных зазоров часть длины образцов находится вне намагничивающих катушек, вследствие чего намагничивание образцов оказывается неоднородным, затрудняя определение магнитного поля расчетным путем. В этом случае *магнитное поле либо измеряется экспериментально* при размещении измерительного преобразователя на участке, где поле является наиболее однородным; *либо рассчитывается по*

*силе тока и числу витков катушек.*

Квадратная магнитная цепь имеет место в стандартном *аппарате Эшштейна*, широко распространенном при контроле свойств электротехнической стали, при этом для проведения расчета напряженности поля задается некоторая средняя длина силовой магнитной линии, определяемая путем сравнения результатов измерения с результатами, полученными при измерениях в замкнутой магнитной цепи.

Следует заметить, что при использовании частично замкнутой магнитной цепи поправка от магнитопровода и воздушных зазоров зависит от проницаемости образца (см. (7.28)), изменяющейся в процессе намагничивания. Это вносит изменяющуюся в процессе измерения погрешность.

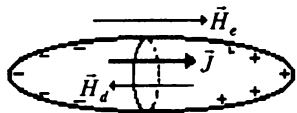
При снижении точности измерения по сравнению с измерениями в замкнутой магнитной цепи этот метод имеет ряд практических преимуществ:

- изготовление полосовых образцов является более простым;
- нет необходимости наносить обмотки на образец;
- возможно изучение влияния внешних воздействий, например одноосных упругих напряжений, на магнитные свойства образцов.

### 7.2.2.3. Разомкнутая магнитная цепь, размагничивающее поле

Разомкнутой называется магнитная цепь, в которой магнитный поток от намагниченного образца замыкается через среду с магнитной проницаемостью, меньшей, чем проницаемость образца, например через воздух.

Измерения в разомкнутой магнитной цепи осложнены тем, что истинное намагничивающее поле в образце, внутреннее поле —  $H_i$ ,



отличается от внешнего  $H_e$ . При намагничивании тела конечных размеров на его торцевых поверхностях возникают так называемые магнитные

заряды  $m^*$ , вызывающие появление внутри тела размагничивающего поля  $H_d$ , направленного противоположно внешнему полю.

Напряженность поля  $H_d$  пропорциональна поверхностной плотности магнитных зарядов:  $H_d \sim \frac{m^*}{S}$ . В свою очередь поверхностная плотность магнитных зарядов по определению равна намагниченности:  $J = \frac{M}{V} = \frac{m^* l}{Sl} = \frac{m^*}{S}$ , откуда

$$H_d = -NJ \text{ (А/м)}, \quad (7.30)$$

где  $N$  — безразмерный коэффициент, называемый размагничивающим фактором,  $J$  — намагниченность образца.

Таким образом, внутреннее поле  $H_i$ , действующее в образце, оказывается равным

$$H_i = H_e - H_d = H_e - NJ. \quad (7.31)$$

Если ферромагнетик гетерогенный и/или форма образца произвольна, то распределение намагниченности и размагничивающего поля в нем неоднородно, тогда  $N$  есть функция координат и выражается тензором.

В случае однородных и изотропных в магнитном отношении ферромагнетиков правильной формы коэффициент размагничивания является константой и поддается расчету.

Рассмотрим некоторые случаи.

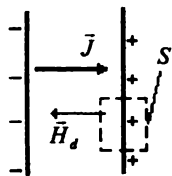
1. При намагничивании *бесконечной ферромагнитной пластины вдоль ее плоскости* магнитные заряды удалены друг от друга на бесконечное расстояние и  $H_d$  оказывается равным нулю, следовательно, и  $N = 0$ .

2. При намагничивании *такой пластины перпендикулярно плоскости* размагничивающий фактор может быть рассчитан с помощью *теоремы Гаусса*: поток поля, создаваемого зарядами с объемной плотностью  $m$  через замкнутую поверхность, охватывающую эти заряды, равен  $m$ , т. е.

$$\int_S H_{dn} ds = m. \quad (7.32)$$

Интеграл берется по всей замкнутой поверхности  $S$ , тогда как  $H_{dn}$  — компонента поля, нормальная к элементу поверхности  $ds$ .

Выберем замкнутую поверхность в виде куба единичного объема, охватывающую часть поверхности пластины с зарядами с поверхностной плотностью  $m^*$  (см. схему). Так как проницаемость



ферромагнетика  $\mu \gg \mu_0$ , то магнитное поле вне пластины практически отсутствует, а возникает только внутри нее. При однородном и постоянном  $H_d$  вклад в общий поток будет вносить только поток через левую грань куба. Поэтому из (7.32), учитывая, что в данном случае объемная

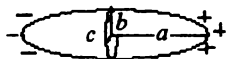
плотность задается только зарядами на поверхности, и с учетом определения намагниченности, получим

$$H_d = \frac{m^*}{S} = J. \quad (7.33)$$

Сравнивая (7.33) с (7.30), находим, что  $N = 1$ . Аналогичное рассмотрение в CGSM дает  $N = 4\pi$ .

3. Приведем результаты более сложных расчетов с использованием метода скалярного магнитного потенциала для образцов в форме эллипсоидов вращения.

Для *вытянутого эллипсоида* с круговым поперечным сечением (см. схему) и  $a > b = c$  (отношение длины эллипсоида к диаметру  $k = a/b = a/c > 1$ ,  $a, b, c$  — главные полуоси)

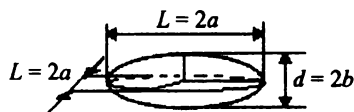


при намагничивании вдоль оси вращения, а размагничивающий фактор

$$N_a = \frac{1}{k^2 - 1} \left\{ \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} \ln(k + \sqrt{k^2 - 1}) - 1 \right\}. \quad (7.34)$$

Для  $k \gg 1$  имеем

$$N_a = \frac{1}{k^2} \{ \ln 2k - 1 \}. \quad (7.35)$$



Для сплюснутого эллипсоида вращения ( $a = c > b$ , т. е. в виде диска), изображенного на схеме, при намагничивании вдоль длинной оси  $a = c$  (здесь  $k = a/b = c/b > 1$ ):

$$N_a = N_c = \frac{1}{2} \left\{ \frac{k^2}{\sqrt{(k^2 - 1)^3}} \arcsin \left[ \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k} \right] - \frac{1}{k^2 - 1} \right\}. \quad (7.36)$$

Приведем также значение  $N$  для тела в форме шара, широко используемой в практике магнитных измерений в разомкнутой магнитной цепи:

$$N = \frac{1}{3} \left( N_{\text{CGSM}} = \frac{4}{3} \pi \right). \quad (7.37)$$

Действительно, для эллипсоида вращения выполняется условие  $N_x + N_y + N_z = 1$ , поскольку шар — это тоже эллипсоид вращения с равными осями, то для него  $N_x = N_y = N_z = 1/3$ .

Приведем значения размагничивающего фактора для образцов наиболее употребительной формы (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Размагничивающий фактор при различных размерах тела			
Отношение размеров, $a/b$	Круглый стержень	Вытянутый эллипсоид	Сплюснутый эллипсоид
1	0,27	0,3333	0,3333
10	0,0172	0,0203	0,0696
100	0,00036	0,00043	0,00776
1000	0,0000036	0,0000066	0,000784

Эллипсоид вращения, диск и шар — наиболее распространенные формы образцов для измерений в разомкнутой магнитной цепи.

4. Для образцов другой формы коэффициент  $N$  определяется однозначно только для образцов с проницаемостью, стремящейся к 1 или бесконечности —  $N_1, N_\infty$ . Расчетные формулы для нахождения  $N_\infty$  удлинённых образцов ( $k \geq 10$ ) в форме цилиндра и призмы прямоугольного сечения имеют вид

$$N_\infty^u = k^{-2}(\ln 1,2 k - 1); \quad N_\infty^n = k^{-2}(\ln 2k - 1), \quad (7.38)$$

где для цилиндра  $k = \frac{l}{d}$  ( $l$  — длина,  $d$  — диаметр цилиндра), для призмы  $k = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{\pi}{S}}$  ( $l$  и  $S$  — соответственно длина и площадь поперечного сечения призмы).

Образцы в форме удлинённых цилиндра и призмы прямоугольного сечения также используют в практике магнитных измерений для материалов со средними значениями проницаемости.

В материалах с очень большой проницаемостью форма образца может играть решающую роль при намагничивании, а *проницаемость тела* при намагничивании в разомкнутой цепи  $\mu_r$  может определяться исключительно коэффициентом размагничивания. Действительно, по определению для проницаемости тела

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H_e}. \quad (7.39)$$

Так как  $B = \mu_0(H_i + J)$  и  $H_i = H_e - NJ$ , то  $H_e = H_i + N\left(\frac{B}{\mu_0} - H_i\right)$ ,

Тогда, подставив в (7.39)  $H_e$  и  $B = \mu \mu_0 H_i$ , получим

$$\mu_r = \frac{1}{\frac{1}{\mu} + N\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)}. \quad (7.40)$$

При  $\mu \rightarrow \infty$  имеем

$$\mu_r = \frac{1}{N}. \quad (7.40')$$



Таким образом, в этом случае проницаемость полностью определяется размагничивающим фактором или формой образца.

## 5. Способы экспериментального определения $N$ .

### а) Способ начальной проницаемости.

Выражение (7.40) может быть использовано для экспериментального определения  $N$  исследуемого образца. Представим его как

$$N = \frac{1}{\mu_a - 1} \left( \frac{\mu_a}{\mu_r} - 1 \right). \quad (7.41)$$

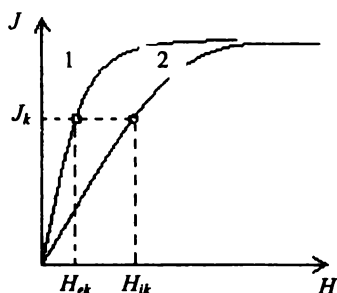
Здесь вместо  $\mu$  фигурирует начальная проницаемость  $\mu_a$ , так как только в этой области кривой намагничивания выполняется условие постоянства проницаемости. Таким образом, измерив начальную проницаемость образца исследуемого материала в разомкнутой и замкнутой магнитной цепи, по (7.41) можно определить величину  $N$  для данного образца.

### б) Способ безгистерезисного намагничивания в РМЦ.

Отклонение безгистерезисной кривой (кривая 1 на рисунке) от оси ординат обусловлено как внутренним размагничивающим фактором, так и внешним. Следуя выражению  $H_i = H_e - NJ$ , выразим размагничивающий фактор

$$N = \frac{H_e}{J} - \frac{H_i}{J}, \quad (7.42)$$

где первое слагаемое — это суммарный размагничивающий фактор, а второе — внутренний. Экспериментально определив для данного



значения намагниченности  $J_k$  соответствующие значения  $H_{ik}$  и  $H_{ek}$ , из кривых намагничивания: 1 — от внутреннего и 2 — от внешнего поля, по (7.42) рассчитываем величину искомого внешнего размагничивающего фактора. Отметим, что для реализации этого метода необходимо определение внутреннего поля.

## 7.2.3. Намагничивающие устройства

При исследовании магнитных свойств материалов в разомкнутой магнитной цепи в качестве источников магнитного поля

обычно используют соленоиды, катушки Гельмгольца и электромагниты.

### 7.2.3.1. Катушки Гельмгольца

Катушки Гельмгольца являются классическим способом получения магнитного поля, ограниченного по величине, но однородного в значительном объеме. Это устройство (рис. 7.5) представляет собой два соединенных последовательно кольцевых витка одинакового радиуса  $R$ , плоскости которых расположены параллельно, а центры находятся на одной оси на расстоянии, равном радиусу. Наиболее однородным поле является в середине между катушками.

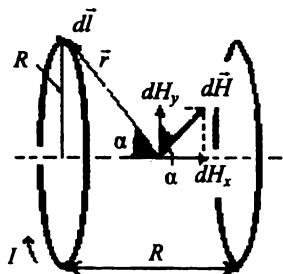


Рис. 7.5. К расчету поля в катушках Гельмгольца

Для расчета поля в центре такой системы воспользуемся законом Био — Савара, который дает выражение напряженности поля элемента проводника  $dl$  с током  $I$  на расстоянии  $r$  от него:

$$dH = \frac{I \sin \varphi}{4\pi r^2} dl, \quad (7.43)$$

где  $\varphi$  — угол между  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ . Для точки на оси кольцевого тока  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\sin \varphi = 1$ . Вектор поля  $d\vec{H}$ , создаваемого линейным проводником  $d\vec{l}$ , расположен в плоскости, перпендикулярной радиус-вектору  $\vec{r}$ . Разложив  $d\vec{H}$  на две составляющие — перпендикулярную оси колец и продольную, найдем, что продольная составляющая равна

$$dH_x = dH \cdot \sin \alpha = \frac{I \sin \alpha}{4\pi r^2} dl. \quad (7.44)$$

При суммировании в данной точке элементарных полей  $dH$  от всех элементов кругового тока в силу симметрии задачи перпендикулярные составляющие в сумме дадут нуль, а результирующее поле будет равно сумме продольных составляющих:

$$H = \oint \frac{I \sin \alpha}{4\pi r^2} dl = \frac{2\pi R I \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (7.45)$$

где  $2\pi R$  — длина окружности кольцевого проводника.

Так как  $r = \frac{R}{\sin \alpha}$ , то

$$H = \frac{2\pi R I \sin \alpha \sin^2 \alpha}{4\pi R^2} = \frac{I \sin^3 \alpha}{2R}. \quad (7.46)$$

Поскольку в данной точке поле создается двумя аналогичными витками, то поле удваивается:

$$H = \frac{I \sin^3 \alpha}{R}. \quad (7.47)$$

Исходя из положения точки, находим, что  $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}}$ ,

а  $\sin^3 \alpha \approx 0,716$ , откуда поле в центре между витками

$$H = 0,716 \frac{I}{R}, \text{ А/м}. \quad (7.48)$$

Для увеличения напряженности поля изготавливают не пару витков, а пару кольцевых катушек, толщина которых много меньше их радиуса. Напряженность поля катушек рассчитывают следующим образом:

$$H = 0,716 \frac{wI}{R}, \text{ А/м}, \quad (7.49)$$

где  $R$  — радиус катушек;  $w$  — число витков в одной катушке. Однородность поля катушек в объеме в виде куба с центром в середине между катушками и со стороны, равной половине их радиуса, составляет 0,5 % вдоль оси и 0,75 % перпендикулярно оси катушек.

### 7.2.3.2. Соленоид

Соленоид представляет собой, как правило, цилиндрическую катушку, по обмотке которой протекает электрический ток.

С помощью обычного соленоида может быть получено магнитное поле напряженностью до  $10^5$  А/м. Если длина соленоида велика по сравнению с его диаметром, то поле в соленоиде характеризуется высокой однородностью в рабочем объеме. Напряженность поля в соленоиде рассчитывают по формуле

$$H = CI, \quad (7.50)$$

где  $I$  — сила тока,  $C$  — константа соленоида.

Для бесконечно длинного однослойного соленоида  $C$  определяется только плотностью намотки, т. е. числом витков на единицу длины  $n$ . Действительно, выберем контур  $L$ , как показано на рис. 7.6.

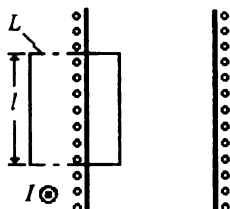


Рис. 7.6. К расчету поля в однослойном соленоиде

Поскольку поле вне соленоида (и достаточно далеко от него) мало по сравнению с полем внутри, то, пренебрегая им, в соответствии с законом полного тока (7.17) для циркуляции поля по выбранному контуру получим  $Hl = N_L I$ , где  $N_L$  — число витков внутри контура. Откуда

$$H = \frac{N_L I}{l} = nI. \quad (7.51)$$

Таким образом, напряженность поля внутри бесконечно длинного соленоида зависит только от силы тока и плотности намотки витков.

Для соленоида конечной длины магнитное поле является неоднородным, постепенно уменьшаясь к краям. Получим выражение для распределения поля вдоль центральной оси в однослойном соленоиде длиной  $L$ , радиусом  $R$  с равномерной намоткой  $w$  витков при силе тока  $I$  (рис. 7.7).

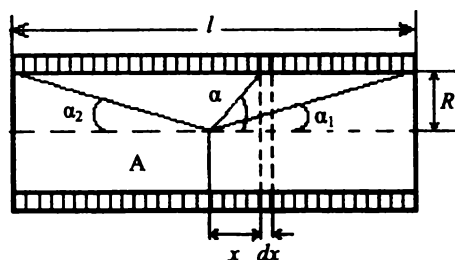


Рис. 7.7. К расчету поля в соленоиде конечной длины

Представим этот соленоид состоящим из тонких колец толщиной  $dx$ . Ток  $i$  через отдельное кольцо может быть выражен через полный ток  $I \times w$  и длину соленоида  $L$ , исходя из пропорции  $\frac{Iw}{L} = \frac{i}{dx}$ , следующим образом:

$$i = \frac{Iw}{L} dx. \quad (7.52)$$

Из рис. 7.7 видно, что  $\frac{x}{R} = \operatorname{ctg} \alpha$ , откуда  $dx = -\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$ . Тогда  $i = -\frac{IwR}{L \sin^2 \alpha} d\alpha$ . Напряженность поля  $dH$  кольцевого тока  $i$  в произвольной точке  $A$  на оси кольца может быть найдена при помощи закона Био — Савара и имеет вид (7.46):

$$dH = \frac{i \sin^3 \alpha}{2R}. \quad (7.46')$$

Подставляя выражение для  $i$  в (7.46'), получим

$$dH = -\frac{Iw \sin \alpha}{2L} d\alpha. \quad (7.53)$$

Напряженность поля в точке  $A$  найдем, интегрируя (7.53) по всем кольцам, при этом  $\alpha$  изменяется в пределах от  $\pi - \alpha_2$  до  $\alpha_1$ :

$$H = \frac{Iw}{2L} \int_{\pi - \alpha_2}^{\alpha_1} (-\sin \alpha) d\alpha = \frac{w}{2L} [\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2] \cdot I, \quad (7.54)$$

где выражение перед  $I$  суть константа соленоида.

Из (7.54) видно, что для соленоида конечной длины в центре и на краю имеем следующие результаты:

1. Если соленоид достаточно длинный ( $L \gg R$ ), то для точки, расположенной в центре, углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  малы, поэтому (7.54) приобретает вид, соответствующий бесконечно длинному соленоиду:

$$H = \frac{wI}{L}.$$

2. Если точка находится на краю соленоида, то один из углов равен  $90^\circ$ , второй близок к нулю, поэтому поле оказывается равным  $H = \frac{wI}{2L}$ , т. е. в 2 раза меньше, чем в центре.

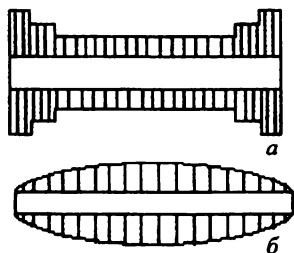
Константа в однослойном соленоиде как функция координаты точки на его оси может быть выражена иным образом:

$$C = \frac{n}{2} \left[ \frac{l+x}{\sqrt{R^2 + (l+x)^2}} + \frac{l-x}{\sqrt{R^2 + (l-x)^2}} \right], \quad (7.55)$$

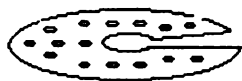
здесь  $2l$  — длина соленоида,  $R$  — его радиус,  $x$  — расстояние до точки от центра соленоида,  $n$  — число витков на единицу длины.

На практике для повышения величины напряженности поля используют многослойные соленоиды (формула для расчета константы имеет еще более громоздкий вид и приводится в специальной литературе — см., напр., работу Д. Монтгомери). Для повышения однородности поля намотку витков делают неоднородной, увеличивая количество слоев к краям соленоида (а) либо применяя каркас в виде эллипсоида вращения (б). В этих случаях константу соленоида определяют экспериментальным путем, используя калиброванную катушку с известным произведением числа витков на площадь поперечного сечения катушки:  $w \times s$ , и измеряя изменение потока магнитного поля в ней при изменении направления тока в соленоиде.

В многослойных резистивных соленоидах (см. схему) из-за ухудшения теплоотдачи возникает ограничение по плотности тока, питающего соленоид. Например, для соленоида, обмотка



которого выполнена из медного провода с хлопчатобумажной изоляцией, допустимая плотность тока составляет  $\sim 1\text{—}3 \text{ А/мм}^2$ . Поэтому для получения полей  $\sim 10^6 \text{ А/м}$  применяют принудительное охлаждение витков соленоида проточной водой, маслом или



жидким азотом. Так, соленоид Биттера собран из медных дисков с разрезом, которые объединяются в спираль. В дисках имеются отверстия для прохождения охлаждающей жидкости. В таком соленоиде

с внутренним отверстием диаметром 30 мм было получено стационарное поле  $\sim 8 \text{ МА/м}$  (около 10 Тл). Ограничение обусловлено резким снижением теплоотвода и перегревом соленоида при образовании паровой прослойки между токопроводящими дисками и охлаждающей жидкостью.

Поля  $\sim 10^7 \text{ А/м}$  и выше получают в *сверхпроводящих соленоидах*. В качестве сверхпроводников используют  $\text{Nb}_3\text{Sn}$ ,  $\text{V}_3\text{Ga}$  и другие материалы с большим значением критического поля. Катушки из сверхпроводника запрессовываются в медный или алюминевый каркас. Система погружается в жидкий гелий, и материал переходит в сверхпроводящее состояние. Возбужденный в нем ток протекает без потребления энергии. Величина поля ограничивается значением  $H_{\text{кр}}$ , разрушающим сверхпроводящее состояние. Достигаемые поля 12—14 МА/м.

Еще большие значения полей могут быть получены в *импульсном режиме*, реализация которого поясняется рис. 7.8.

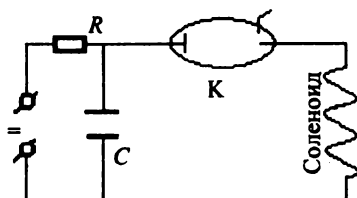


Рис. 7.8. Схема получения импульсного магнитного поля

От источника постоянного тока заряжается батарея конденсаторов большой емкости. Затем замыкается ключ К, роль которого играет газоразрядная лампа — игнитрон, импульс тока течет через катушку, создавая импульсное магнитное поле.

При использовании батареи конденсаторов емкостью в 3000 мкФ и напряжением 3000 В можно получить поле  $\sim 20\text{—}30$  МА/м ( $250\text{—}375$  кЭ, или 25 Тл) в течение 1 мс.

Более сильные магнитные поля, получаемые без разрушения соленоида и достигающие значений  $40\text{—}55$  МА/м, получают в геликоидальных соленоидах, выточенных из прочных материалов, например, кадмиевой бронзы.

По существу, после замыкания игнитрона цепь представляет собой колебательный контур, в котором имеют место затухающие колебания тока. Благодаря тому, что характерное время перемангничивания меньше периода колебаний, можно зарегистрировать полный цикл гистерезиса.

Получение сверхсильных полей возможно при снижении времени протекания тока. Но при этом возникает ограничение, обусловленное механической прочностью материала витков, которые могут разрушиться под действием сил электромагнитного взаимодействия. На этом пути получают поля до 400 МА/м, действующие в течение периода, измеряемого микросекундами, затем катушка разрушается.

### 7.2.3.3. Электромагнит

Электромагниты различных конструкций широко применяют для создания сильных магнитных полей  $\sim 1\text{—}2 \cdot 10^6$  А/м ( $12,5\text{—}25$  кЭ). Устройство электромагнита, который состоит из катушек (К) и магнитопровода, схематически показано на рис. 7.9.

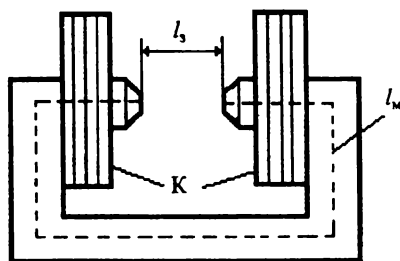


Рис. 7.9. Конструкция и магнитная цепь электромагнита



Электромагниты отличаются по месту расположения намагничивающих катушек, по форме и габаритам магнитопроводов, замыкающих поток, и форме полюсных наконечников. Магнитопроводы и наконечники обычно изготавливают из магнитомягкой стали, железа. Увеличения напряженности поля в зазоре электромагнита можно добиться путем использования для наконечников материалов с повышенной индукцией насыщения, например, из сплава пермендюр (близкий по составу к 50 Co — 50 Fe), и концентрацией магнитного потока путем придания полюсам конической формы.

Магнитная цепь электромагнита состоит из двух участков: магнитопровода длиной  $l_m$  и воздушного зазора  $l_z$ . МДС определяется силой тока  $I$  в обмотках с числом витков  $w$ . Из закона полного тока (7.17) и закона для магнитной цепи (7.20) для магнитного потока в зазоре имеем

$$\Phi_z = \frac{wI}{\frac{l_m}{\mu\mu_0 S_m} + \frac{l_z}{\mu_0 S_z}}. \quad (7.56)$$

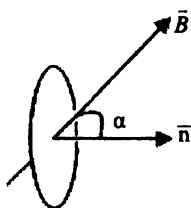
Так как  $\mu \gg \mu_0$ , то первым слагаемым в знаменателе можно пренебречь; учитывая, что  $\Phi_z = \mu_0 H_z S_z$ , получаем приближенное выражение для поля в зазоре электромагнита:

$$H_z = \frac{wI}{l_z}. \quad (7.57)$$

Отсюда видно, что при заданном зазоре поле линейно увеличивается с током, а максимальное поле можно получить при минимальном зазоре.

Однако с приближением к насыщению магнитопровода электромагнита возрастание поля практически прекращается. Это обусловлено уменьшением проницаемости магнитопровода и ростом его магнитного сопротивления. В этой области полей при измерении намагниченности образцов в разомкнутой магнитной цепи с помощью индукционных катушек наблюдается явление, получившее название *магнитного изображения*, заключающееся в неожиданном увеличении (или снижении) сигнала в катушках и также связанное с магнитным насыщением сердечника электромагнита (см. об этом далее).

### 7.3. Методы и приборы для измерения магнитной индукции



Для измерения магнитной индукции наиболее широко используют измерение магнитного потока. В основе измерения магнитного потока лежит закон электромагнитной индукции. При этом первичным преобразователем является индукционная (измерительная) катушка — ИК. Величина магнитного потока, сцепленного с витками ИК, задается выражением

$$\Psi = w\Phi = wBS\cos\alpha = wB_n S, \quad (7.58)$$

$$\Psi = w\mu\mu_0 HS\cos\alpha, \quad (7.58')$$

где  $\Psi$  — потокосцепление,  $\Phi$  — магнитный поток,  $w$  — число витков в ИК,  $S$  — ее сечение;  $B$  — индукция магнитного поля (в воздухе  $B = B_0 = \mu_0 H$ , в магнетике  $B = \mu\mu_0 H$ );  $\alpha$  — угол между нормалью к плоскости катушки и вектором индукции.

Отсюда следует, что изменение полного магнитного потока можно осуществить несколькими путями, а именно изменением следующих параметров:  $\cos\alpha$ ;  $\mu$ ;  $H$ ;  $B$ ;  $S$ ;  $w$ .

При изменении  $\alpha$ , т. е. положения ИК, возможны варианты:

- а) скачкообразный поворот на  $90^\circ$  или на  $180^\circ$ ;
- б) непрерывное вращение ( $d\alpha/dt = \text{const}$ );
- в) периодическое крутильное колебание (от  $\alpha$  до  $-\alpha$ ).

Второй путь — изменение  $\mu$  возможно, например, за счет подмагничивания, которое и используется в ферроиндукционных преобразователях — феррозондах.

Третий путь реализуют изменением направления намагничивающего тока или его выключением, а также удалением катушки из области измеряемого  $B$  или  $H$  однократно или же создавая прямолинейные колебания катушки.

Четвертый путь — изменения  $w$  и  $S$  — еще не получил практического применения.

При изменении магнитного потока в ИК наводится ЭДС:

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -w \frac{d\Phi}{dt}. \quad (7.59)$$

Видно, что для измерения приращения  $\Delta\Phi$  необходимо произвести операцию интегрирования ЭДС за время изменения потока  $\tau$ . Действительно

$$\int_0^{\tau} e dt = -w \int_{\Phi_0}^{\Phi_1} d\Phi = -w(\Phi_1 - \Phi_0) = -w\Delta\Phi. \quad (7.60)$$

Откуда 
$$\Delta\Phi = \frac{\int_0^{\tau} e dt}{w}. \quad (7.61)$$

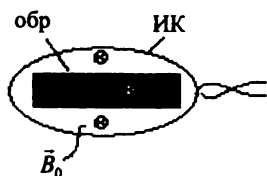
Для определения собственно величины  $\Phi$ , а также  $B$  или  $H$  удобно, чтобы  $\cos\alpha = 1$  (нормаль ИК совпадает с направлением вектора измеряемой величины), а приращения составляли  $\Phi$  или  $2\Phi$ . Оба варианта часто реализуют выключением или изменением направления намагничивающего тока. Приращение  $\Delta\Phi = \Phi$  можно получить также удалением катушки из области измеряемой индукции. При измерении индукции в материале способ выключения тока не подходит из-за наличия гистерезиса. При переключении тока формула для расчета индукции приобретает вид

$$B = \frac{\int_0^{\tau} e dt}{2wS}. \quad (7.62)$$

Метод, при котором приращение потока осуществляют скачкообразно, получил название *индукционно-импульсного*.

Операция интегрирования может быть выполнена с помощью баллистического гальванометра, флюксметра (веберметра), электронного интегратора или ЭВМ. В зависимости от соотношения сопротивлений интегрирующего прибора и ИК производится интегрирование напряжения или тока, протекающего в измерительной цепи.

**Учет поправки на «воздушный зазор».** При измерении индукции может возникнуть погрешность, связанная с неравенством сечения ИК и сечения образца (см. схему). До сих пор предполагалось, что сечение катушки  $s_k$  равно сечению образца  $s_{обр}$ .



В действительности  $s_k > s_{обр}$ , так как между обмоткой и образцом имеется каркас катушки и воздушный зазор. Вследствие этого измеренное изменение потокосцепления  $\Delta\psi$  (отсчет по прибору) обусловлено изменением магнитного потока как в образце, так и в воздушном зазоре (предполагается, что размагничивающее поле отсутствует):

$$\Delta\psi = \Delta\psi_{обр} + \Delta\psi_{в.з} = w s_{обр} \Delta B + w \mu_0 (s_k - s_{обр}) \Delta H. \quad (7.63)$$

После несложных преобразований получаем формулу для расчета изменения индукции в образце, учитывающую поправку на поток индукции поля в воздушном зазоре:

$$\Delta B = \frac{\Delta\psi}{w s_{обр}} - \mu_0 \Delta H \left( \frac{s_k}{s_{обр}} - 1 \right). \quad (7.64)$$

Для определенности заметим, что при измерении путем переключения направления намагничивающего тока имеем  $\Delta B = 2B$  и  $\Delta H = 2H$ . В частности, данная формула лежит в основе расчета значений индукции при измерении основной кривой намагничивания и петли гистерезиса индукционно-импульсным методом. Если же измерение происходит путем перемещения ИК с образца в другое место с тем же значением поля, то в расчетной формуле остается только первое слагаемое.

### 7.3.1. Баллистический гальванометр

До недавнего времени баллистический гальванометр являлся массовым прибором для измерения магнитного потока. В основе баллистического метода магнитных измерений лежит пропорциональная зависимость между изменением исследуемого магнитного потока в ИК и количеством электричества (заряда), протекающим при этом через обмотку рамки гальванометра, которая соединена с ИК в измерительную цепь.

**Устройство и работа баллистического гальванометра.** Обычный гальванометр магнитоэлектрической системы состоит

из рамки с обмоткой на упругом подвесе, которая находится в поле *радиальной симметрии*, создаваемом магнитной системой (рис. 7.10).

Изменение измеряемого магнитного потока приводит к возбуждению индукционного тока в измерительной цепи. При протекании тока через обмотку рамки возникает момент силы Ампера, вызывающий поворот рамки, который фиксируется с помощью стрелки или светового луча, отраженного от зеркала ( «зайчика»), укрепленного на подвесе рамки.

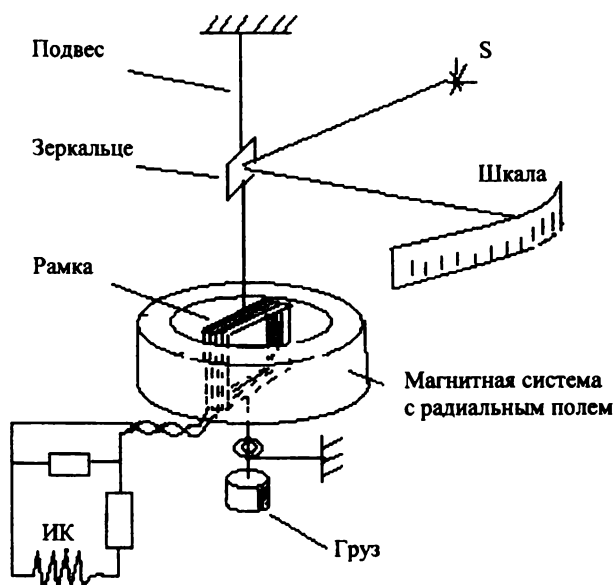


Рис. 7.10. Конструкция и измерительная цепь гальванометра

Отметим следующие особенности баллистического гальванометра:

— баллистический гальванометр отличается от обычного зеркального большой инерционностью подвижной части; поэтому период свободных колебаний системы значительно увеличен;

— баллистический гальванометр интегрирует ток в измерительной цепи, так как его входное сопротивление (сопротивление рамки) невелико;

— подвижная система баллистического гальванометра из-за большого момента инерции приходит в движение лишь после прекращения импульса тока через обмотку рамки.

Уравнение движения подвижной системы баллистического гальванометра в соответствии с основным законом динамики вращательного движения имеет вид

$$K \frac{d\omega}{dt} = K \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \sum_i M_i, \quad (1д)$$

где  $K$  — момент инерции подвижной системы,  $\omega$  — угловая скорость,  $\alpha$  — угол поворота,  $\sum M_i$  — сумма моментов всех сил, приложенных к рамке. Действуют следующие моменты сил:

$M_1 = \psi i$  — момент сил, действующий на рамку с током  $i$  в поле магнитной системы,  $\psi = \mu_0 n s H$  — потокоцепление  $n$  витков рамки сечением  $s$  с полем магнитной системы  $H$  (действительно,  $M_1 = Fl = n B l l = n \mu_0 H s i = \psi i$ );

$M_2 = -D\alpha$  — момент силы упругости, возникающий при закручивании нити подвеса,  $D$  — удельный момент кручения нити,  $\alpha$  — угол отклонения рамки;

$M_3 = -(d\alpha/dt)$  — момент сил электромагнитного торможения. Благодаря тому, что стороны рамки при ее движении пересекают силовые линии магнитного поля системы, в рамке возникает ЭДС, которая вызывает появление индукционного тока. Вследствие взаимодействия индукционного тока в обмотке рамки, движущейся в магнитном поле системы, с магнитным полем системы возникает пара сил, момент которой направлен противоположно вращающему моменту  $M_1$ , причем его величина пропорциональна скорости вращения рамки.  $G$  — удельный момент торможения, который тем меньше, чем меньше индукционный ток, а следовательно, он тем меньше, чем больше сопротивление измерительной цепи.

Моментом силы сопротивления воздуха, по сравнению с  $M_3$ , можно пренебречь.

С учетом введенных обозначений уравнение принимает вид

$$K \frac{d^2\alpha}{dt^2} + G \frac{d\alpha}{dt} + D\alpha = \psi \cdot i. \quad (2д)$$

Отметим следующие моменты:

1.  $K$ ,  $D$  и  $\psi$  — для данной системы величины постоянные;
2.  $G$  — величина, зависящая от сопротивления внешней цепи, так как определяется силой индукционного тока в ней; параметр  $\beta = \frac{G}{2\sqrt{DK}}$  называется степенью успокоения гальванометра;
3.  $T_0 \gg \tau$  — период собственных колебаний подвеса много больше времени протекания импульса  $\tau$   $\left( T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{K}{D}} \right)$ .

Конкретный вид решения уравнения —  $\alpha = \alpha(t)$  так же, как и характер движения подвеса, определяется соотношением величин  $K$ ,  $D$ ,  $\psi$ ,  $G$ .

В соответствии с условиями баллистического режима уравнение движения решается отдельно для двух промежутков времени:

1.  $0 < t \leq \tau$  (ток в рамке идет, а рамка неподвижна);
2.  $t > \tau$  (ток отсутствует, а рамка движется).

Решение для первого промежутка является граничным условием для второго.

1. Для  $0 < t \leq \tau$  ( $\alpha = 0$ ) уравнение принимает вид

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + G \frac{d\alpha}{dt} = \psi \cdot i. \quad (3д)$$

Проинтегрировав это уравнение по времени от 0 до  $\tau$ , учитывая  $\alpha = 0$  и  $\int_0^\tau i dt = Q$ , получим

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\psi}{K} Q. \quad (4д)$$

Это выражение определяет начальную скорость движения рамки гальванометра для второго промежутка времени  $t > \tau$ .

2. Для второго промежутка времени общее решение уравнения (2д) имеет вид

$$\alpha = e^{-\frac{G}{2K}t} \left\{ \exp \left( \left[ \sqrt{\left( \frac{G}{2K} \right)^2 - \frac{D}{K}} t \right] \right) + \exp \left( - \left[ \sqrt{\left( \frac{G}{2K} \right)^2 - \frac{D}{K}} t \right] \right) \right\} \frac{\psi}{2K} Q t. \quad (5д)$$

Из этого выражения видно, что возможны три вида решения, соответствующие трем режимам работы гальванометра:

— при  $\frac{G}{2K} < \sqrt{\frac{D}{K}}$  — периодический режим (при малом  $G$ , следовательно, большом сопротивлении измерительной цепи), когда после

прохождения импульса тока система испытывает периодические колебания около положения равновесия;

— при  $\frac{G}{2K} > \sqrt{\frac{D}{K}}$  — аperiодический режим (малое сопротивление

цепи), когда система после максимального отклонения медленно возвращается к положению равновесия;

— при  $\frac{G}{2K} = \sqrt{\frac{D}{K}}$  — критический (с оптимальным сопротивлением

цепи), когда система после отклонения за достаточно короткое время возвращается к положению равновесия.

Для магнитных измерений важна величина первого максимального отброса  $\alpha_{\text{макс}}$ . Для его нахождения следует проделать следующие операции:

1) найти момент времени  $t_1$ , при котором  $\alpha = \alpha_{\text{макс}}$ , продифференцировав решение (5д) и подставив в получившееся выражение  $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ , тем самым учтя, что в момент достижения максимального отброса рамка остановится;

2) найти выражение для  $\alpha_{\text{макс}}$  путем подстановки в решение (5д) выражения для  $t_1$ .

Не приводя здесь сложных выражений для  $\alpha_{\text{макс}}$ , укажем, что баллистический отброс (первое максимальное отклонение рамки) всегда пропорционален электрическому заряду, прошедшему через рамку.

В критическом режиме имеет место наиболее простое соотношение между величиной баллистического отброса и зарядом

$$\alpha_{\text{макс}} = \frac{2\psi}{eG} Q \quad \text{или} \quad \alpha_{\text{макс}} = S_6 Q. \quad (6д)$$

Здесь  $S_6$  — чувствительность гальванометра к заряду,  $e$  — основание натурального логарифма.

Рассмотрим электрические процессы в измерительной цепи, чтобы связать заряд, прошедший через рамку гальванометра за время импульса тока  $\tau$ , с изменением магнитного потока через ИК.

Для ЭДС в измерительной цепи, состоящей из ИК с числом витков  $w$  и обмотки рамки гальванометра, при изменении потока через витки ИК можно записать второй закон Кирхгофа:

$$\varepsilon - L \frac{di}{dt} = iR, \quad (7д)$$

где  $L(di/dt)$  — ЭДС самоиндукции,  $i$  — мгновенное значение силы тока,  $L$  — индуктивность измерительной цепи;  $iR$  — падение напряжения на



активном сопротивлении измерительной цепи. Заметим, что за время течения тока рамка покоится, поэтому ЭДС индукции от взаимодействия рамки с полем магнитной системы исключена из рассмотрения. Поскольку ЭДС, возникающая в витках ИК,  $\varepsilon = -w \frac{d\Phi}{dt}$ , то

$$-w \frac{d\Phi}{dt} = iR + L \frac{di}{dt}. \quad (8д)$$

Проинтегрировав последнее уравнение от 0 до  $\tau$ , т. е. за время протекания тока, получим

$$w\Delta\Phi = R \int_0^\tau i dt + L \int_0^\tau di = RQ + L \cdot i \Big|_0^\tau = RQ. \quad (9д)$$

Второй член уравнения после интегрирования обращается в нуль потому, что и в начальный момент, и в момент окончания интегрирования ток в цепи равен нулю.

Сопоставив (6д) и (9д), находим уравнение преобразования баллистического гальванометра

$$\Delta\Phi = \frac{R}{wS_6} \alpha_{\text{макс}} = \frac{1}{w} C_6 \alpha_{\text{макс}}. \quad (10д)$$

В случае  $\Delta\Phi = 2\Phi = 2BS_{\text{обр}}$  получим известную расчетную формулу

$$B = \frac{C_6 \alpha_{\text{м}}}{2wS_{\text{обр}}}, \text{ Тл}, \quad (11д)$$

где  $C_6$  — баллистическая постоянная гальванометра, Вб/дел, определяемая по измерению градуированного магнитного потока, создаваемого с помощью эталонной катушки взаимной индуктивности.

Изменение величины  $C_6$ , т. е. чувствительности гальванометра, в  $n$  раз осуществляется путем изменения сопротивления внешней части измерительной цепи. Для того чтобы режим работы не изменился и оставался критическим, изменение сопротивлений во внешней цепи должно удовлетворять соотношениям

$$r_{\text{пар}} = \frac{n}{n-1} r_{\text{к}}; \quad r_{\text{посл}} = (n-1)r_{\text{к}} + r_{\text{к}}, \quad (12д)$$

где  $r_{\text{к}}$  — критическое сопротивление гальванометра,  $r_{\text{к}}$  — экспериментально определенное сопротивление внешней цепи гальванометра, при котором он работает в критическом режиме.

### 7.3.2. Веберметр (флюксметр)

**Веберметр магнитоэлектрической системы.** Другим прибором, предназначенным для измерения магнитного потока, является веберметр — стрелочный прибор магнитоэлектрической системы, проградуированный в единицах магнитного потока. В отличие от баллистического гальванометра он прост в эксплуатации и может использоваться для точного измерения медленно меняющихся потоков. При измерении быстро изменяющихся потоков веберметр уступает баллистическому гальванометру по точности и чувствительности.

Устройство магнитоэлектрического веберметра (флюксметра) отличается от баллистического гальванометра:

— момент кручения нити подвеса его подвижной системы пренебрежимо мал;

— подвижная часть состоит из легкой бескаркасной рамки без возвратных пружин.

Поэтому подвижная часть магнитоэлектрического веберметра находится в равновесии в любом положении.

*Уравнение движения подвижной части веберметра* имеет вид, аналогичный приведенному выше для баллистического гальванометра (3д), при этом противодействующий момент подвеса считается равным нулю:  $D = 0$ , поэтому

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + G \frac{d\alpha}{dt} = \psi \cdot i. \quad (13д)$$

Для нахождения решения  $\alpha = \alpha(t)$  проинтегрируем уравнение за промежуток времени изменения потока  $\tau$ , одновременно являющимся временем поворота стрелки, и получим

$$K \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_0^\tau + G\alpha = \psi Q. \quad (14д)$$

Так как скорость рамки в начальный и конечный моменты времени равна нулю, то окончательно к моменту окончания течения тока в рамке

$$\alpha = \frac{\psi}{G} Q. \quad (15д)$$

*Уравнение для тока в рамке веберметра* также отличается. Поскольку момент инерции нити подвеса мал, то рамка начинает двигаться

сразу при появлении сигнала в ИК и, следовательно, тока в рамке. Поэтому в уравнении для тока наряду с ЭДС самоиндукции и падением напряжения на активном сопротивлении цепи, необходимо учесть противоЭДС, которая дополнительно будет наводиться при вращении рамки в поле магнитной системы из-за пересечения линий магнитной индукции в рабочем зазоре. Она пропорциональна угловой скорости вращения рамки и рабочему потокоцеплению:  $\psi(d\alpha/dt)$ . В этом случае дифференциальное уравнение для тока приобретает вид

$$L \frac{di}{dt} + \psi \frac{d\alpha}{dt} + iR = \varepsilon = -w \frac{d\Phi}{dt}. \quad (16д)$$

При условии малой индуктивности  $L$  и малой скорости изменения тока первым слагаемым можно пренебречь. С учетом того, что угловая скорость вращения рамки в начале и в конце интервала интегрирования (в течение времени прохождения тока) равна нулю, после интегрирования имеем:

$$RQ = w\Delta\Phi. \quad (17д)$$

Окончательно для угла поворота рамки получаем:

$$\alpha = \frac{\psi}{G} \frac{w}{R} \Delta\Phi. \quad (18д)$$

Таким образом, отклонение подвижной части веберметра пропорционально изменению магнитного потока. При этом следует иметь в виду, что имеются ограничения на индуктивность измерительной цепи и на ее активное сопротивление:

— ограничение на величину индуктивности одновременно означает, что чем меньше частота изменения магнитного потока (не импульсный режим), тем точнее подвижная часть веберметра будет отслеживать его изменение;

— ограничение на величину активного сопротивления (в существующих приборах  $< 10 \text{ Ом}$ ) означает, что при большой величине сопротивления медленнее устанавливается угловая скорость движения подвижной части; одновременно это ограничения и на величину сопротивления и/или число витков ИК.

Несоблюдение указанных ограничений приводит к увеличению погрешности прибора.

**Фотоэлектрический веберметр.** Обладает более высокой чувствительностью, и его использование в значительной степени

снимает ограничение на малое число витков в ИК. Основу этого веберметра составляет фотогальванометрический усилитель, охваченный глубокой дифференцирующей обратной связью (рис. 7.11). ИК включена в цепь подвижной системы магнитоэлектрического веберметра  $\Gamma$ , на легкой рамке которого укреплено небольшое зеркальце.

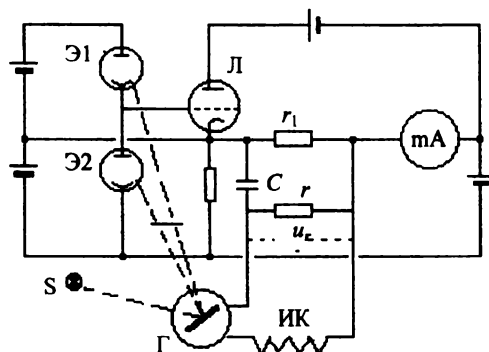


Рис. 7.11. Упрощенная схема фотоэлектрического веберметра

В исходном состоянии сигнал от ИК равен нулю, луч от источника  $S$ , отражаясь от зеркальца, равномерно освещает фотоэлементы  $\text{Э}1$  и  $\text{Э}2$  так, что сопротивление фотоэлементов одинаково, потенциал в точке между ними, а значит, и потенциал на сетке электронной лампы  $\text{Л}$  остаются неизменными.

При изменении потокосцепления в ИК появляется ЭДС  $\varepsilon$ , а в цепи гальванометра — ток  $i$ . При этом происходит поворот рамки, который приводит к перераспределению светового потока между фотоэлементами. В результате изменяются сопротивления фотоэлементов и распределение напряжения между ними. Потенциал в точке между ними, а значит, и потенциал сетки изменяются пропорционально отклонению рамки. Изменение потенциала сетки лампы влечет за собой пропорциональное изменение тока в анодной цепи  $i_a$ , которое регистрируется миллиамперметром  $\text{mA}$ .

Падение напряжения с резистора  $r_1$  дифференцируется  $r$  — цепочкой и в противофазе поступает в цепь ИК в виде напряже-

ния отрицательной обратной связи  $u_r$ , уравнивая ЭДС. Анодный ток лампы будет изменяться до тех пор, пока напряжение обратной связи  $u_r$  не уравнивает ЭДС:

$$\varepsilon = -u_r. \quad (7.65)$$

Так как  $\varepsilon = -w \frac{d\Phi}{dt}$ , а входное напряжение  $r$  —  $C$  цепочки:  $u_{r1} = i_a r_1$  и ее выходное напряжение  $u_r$  пропорционально производной от входного напряжения  $u_r = rC \left( \frac{du_{r1}}{dt} \right) = rr_1 C \frac{di_a}{dt}$ , то

$$-w \frac{d\Phi}{dt} = -rr_1 C \frac{di_a}{dt}. \quad (7.66)$$

Поскольку отклонение рамки магнитоэлектрического флюксметра (см. (18д)), а также и следующее за ним изменение анодного тока пропорциональны интегралу входного напряжения, то, проинтегрировав (7.66), получим

$$\Delta i_a = \frac{1}{rr_1 C} \int_0^{\tau} \varepsilon dt = \frac{w}{rr_1 C} \Delta \Phi. \quad (7.67)$$

Таким образом, видно, что изменение выходного тока фотогальванометрического усилителя пропорционально интегралу напряжения на его входе и, следовательно, приращению магнитного потока. Это позволяет проградуировать миллиамперметр сразу в единицах потока.

Данный принцип реализован в отечественных микровеберметрах Ф-190 и Ф-191. Благодаря введению отрицательной обратной связи, входное сопротивление таких приборов увеличивается (в Ф-190 — до 300 Ом, в Ф-191 — до 1000 Ом) и становится возможным использование ИК с более широким диапазоном сопротивлений и витков, чем для стрелочного веберметра.

К недостаткам этих приборов следует отнести «сползание нуля» веберметра, вызванное возникновением термоЭДС в измерительной цепи (для компенсации термоЭДС введена отдельная компенсационная цепь, позволяющая удерживать нуль в течение 7—60 с), а также узкая частотная полоса пропускания (несколько

десятков герц), которая обуславливает малое быстродействие приборов и, как следствие, занижение результатов измерения быстроизменяющихся сигналов.

### 7.3.3. Методы аналогового и цифрового интегрирования сигнала ЭДС

**Веберметры с интеграторами на операционных усилителях** (такие, как стрелочный Ф-199 и с цифровым отсчетом Ф5050) появились с развитием микроэлектронной элементной базы.

Выходное напряжение операционного усилителя при использовании дифференцирующей обратной связи (рис. 7.12) пропорционально интегралу от входного напряжения. Если в качестве входного напряжения имеется ЭДС с ИК —  $\epsilon$ , то  $U_{\text{вых}} \sim \Delta\Phi$ :

$$U_{\text{вых}} = \frac{1}{rC} \int_0^t \epsilon dt = \frac{w}{rC} \Delta\Phi. \quad (7.68)$$

Данные усилители характеризуются широкой полосой пропускания, большим коэффициентом усиления, большим входным сопротивлением.

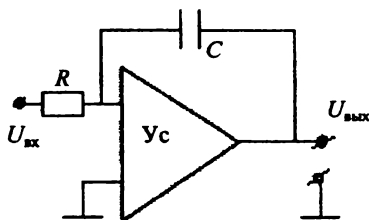


Рис. 7.12. Схема операционного усилителя с отрицательной обратной связью

Увеличение коэффициента усиления помогает поднять чувствительность приборов; увеличение входного сопротивления — использовать многовитковые ИК с большим сопротивлением и также приводит к увеличению чувствительности к потоку. Увеличение ширины пропускания увеличивает быстродействие прибора, уменьшая время установления показаний, снижает динамическую погрешность измерения, проявляющуюся в занижении результатов измерения в любой момент времени. Главным их

недостатком является наличие дрейфа нуля электронной схемы, которое также интегрируется усилителем, что требует постоянной корректировки при измерении в импульсном режиме перематчивания и ограничивает время измерения в квазистатическом режиме.

Для снижения дрейфа применяют различные схемы автоматической коррекции, основанные на запоминании значения напряжения дрейфа при нулевом напряжении входного сигнала и подаче его в противофазе на вход интегратора в течение всего времени измерения. При этом изменение дрейфа нуля в процессе измерения по-прежнему вносит погрешность в результат.

Такой способ реализован в отечественном приборе Ф5050 с аналоговым интегратором и с цифровым табло для отсчета показаний. Принцип работы иллюстрируется схемой рис. 7.13. Кнопка «Пуск» переводит прибор в режим интегрирования, одновременно с корректирующего усилителя (КУ) на вход операционного (ОУ) подается в противофазе напряжение, равное напряжению дрейфа усилителя на момент начала измерения. Выходное напряжение, которое равно интегралу от входного напряжения (7.68), заряжает конденсатор до напряжения  $U_{\text{вых}} = U_C$ .

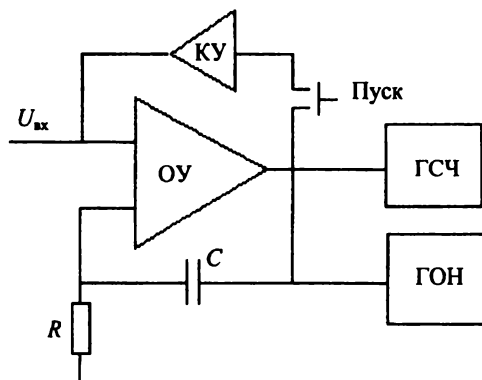


Рис. 7.13. Схема прибора с аналоговым интегратором

Через заданный промежуток времени  $T_{\text{изм}}$  включается генератор опорного напряжения (ГОН), формирующий линейный закон разряда конденсатора  $C$ . Это используется как способ измерения

напряжения  $U_C$ . При линейном законе разряда  $U_C$  пропорционально времени разряда  $T$ , которое измеряется путем подсчета импульсов стабильной частоты с генератора ГСЧ. Измеренное напряжение  $U_{\text{вых}} \sim \Delta\Phi$ .

*Цифровое интегрирование сигнала ЭДС* открывает новые возможности повышения точности и автоматизации процесса измерения магнитного потока. Цифровое интегрирование возможно как с применением отдельных микросхем, так и микропроцессоров и средств вычислительной техники. При этом можно использовать устройства преобразования напряжения в частоту (ПНЧ) — микросхему, на вход которой подается аналоговый сигнал, а на выходе появляется последовательность импульсов, при этом частота следования импульсов на выходе пропорциональна «мгновенному» уровню входного напряжения.

Если на вход подается ЭДС с ИК, то на выходе в соответствии с уравнением преобразования ПНЧ имеем

$$f(t) = k\varepsilon_{\text{вх}}(t), \quad (7.69)$$

где  $f(t)$  — частота;  $k$  — коэффициент преобразования.

Вольт-секундная площадь сигнала  $\varepsilon_{\text{вх}}(t)$  за время измерения  $\tau$ , с одной стороны, пропорциональна  $\Delta\Phi$ :  $S = \int_0^{\tau} \varepsilon_{\text{вх}}(t) dt = -w\Delta\Phi$ , с другой — пропорциональна числу импульсов  $N$  на выходе преобразователя за это время:

$$S = \frac{1}{k} \int_0^{\tau} f(t) dt = \frac{1}{k} N. \quad (7.70)$$

Отсюда для определения  $\Delta\Phi$  достаточно посчитать число импульсов на выходе ПНЧ за полное время измерения:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{kw} N. \quad (7.71)$$

При использовании ЭВМ входное напряжение считывается и преобразовывается с помощью АЦП в цифровой код через равные, достаточно малые промежутки времени, затем оцифрованный ход  $\varepsilon_{\text{вх}}(t)$  поступает в ЭВМ и подвергается численному интегрированию за время измерения. Полученный интеграл про-



порционален приращению магнитного потока за время измерения. Высокая точность в этих случаях обеспечивается, если входное напряжение незначительно изменяется за время считывания при оцифровке.

#### 7.3.4. Методики измерений в постоянном магнитном поле

При непрерывном увеличении постоянного намагничивающего поля и одновременной регистрации изменения магнитного потока, например веберметром, исходя из размагниченного состояния, возможно определение так называемой *кривой первоначального намагничивания*  $B = f(H)$ . Однако характеристикой материала принято считать не эту кривую, а *основную*, или *коммутационную*, *кривую намагничивания*, отличающуюся тем, что при определении магнитной индукции в каждой точке на такой кривой предварительно производят 10—12-кратное переключение направления поля для получения установившегося частного цикла. При коммутации поля происходит стабилизация магнитного состояния образца при заданном значении внешнего поля (рис. 7.14).

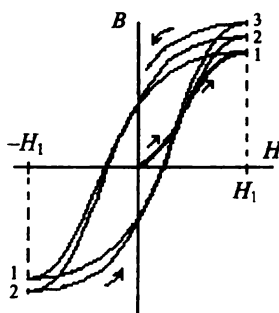


Рис. 7.14. Изменение магнитной индукции при коммутации намагничивающего поля

Таким образом, основная кривая намагничивания является геометрическим местом вершин установившихся симметричных петель гистерезиса.

По полученным при определении кривой намагничивания данным строят зависимость магнитной проницаемости от напряженности поля:

$$\mu = \frac{B(H)}{\mu_0 H}. \quad (7.72)$$

Эта зависимость также характеризует свойства материала и служит для определения значений начальной и максимальной проницаемостей. Если способ определения максимальной проницаемости очевиден, то по поводу определения начальной проницаемости следует указать, что она определяется путем экстраполяции значений проницаемости, определенных в весьма слабых полях и подчиняющихся линейной зависимости, на нулевое значение поля.

Другой важнейшей характеристикой материала является *предельная петля гистерезиса*, а также ее параметры: площадь, характеризующая *потери энергии на цикл* перемагничивания, *коэрцитивная сила*, *остаточная намагниченность* или *индукция*.

Индукционно-импульсная методика определения точек петли гистерезиса состоит в том, что при наличии двух электрических цепей с различными значениями тока можно, переходя от одной цепи к другой, скачком изменять магнитное состояние образца и определять соответствующее изменение магнитного потока. В одной из цепей установлено значение тока, позволяющее перевести образец в состояние технического насыщения. Соответствующее значение индукции в образце предварительно определено по кривой намагничивания. Тогда, измеряя изменение потока при скачкообразном переключении поля на меньшее значение, становится возможным определение соответствующего ему значения индукции:

$$\Delta\Psi_i = wS\Delta B; \quad \Delta B = \Delta\Psi_i / wS; \quad B_i = B_m - \Delta B. \quad (7.73)$$

Таким образом, изменяя полярность максимального и текущего токов и совершая обход по петле, при данном текущем значении тока можно измерить четыре точки на петле гистерезиса. Изменяя значение тока, определяют форму петли и ее основные параметры (рис. 7.15).

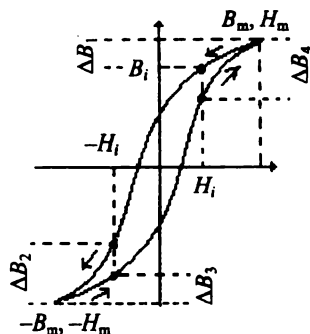


Рис. 7.15. Изменение поля и магнитной индукции при измерении индукционно-импульсным методом

Для магнитно-мягких материалов индукционно-импульсная методика с ручным управлением тока реализована в промышленных установках У5045, в которых в качестве измерителя потока использован микровеберметр Ф5050. Данная методика закреплена в стандартах, обладает высокой точностью и воспроизводимостью результатов, однако является малопроизводительной и трудоемкой. В настоящее время эта методика реализована также в автоматизированных установках, когда алгоритм изменения тока осуществляется с помощью программируемого источника тока, а интегрирование соответствующих сигналов производится компьютером. Использование компьютера позволяет фиксировать протокол каждого измерения и формировать отчет.

Для магнитно-твердых материалов, используемых в качестве постоянных магнитов, основными параметрами являются *коэрцитивная сила*, *остаточная намагниченность*, или индукция, и *максимальное энергетическое произведение*. Для установления этих параметров достаточно определения «спинки» петли гистерезиса — ее части, расположенной во втором квадранте графика (рис. 7.16 а).

Так, энергетическое произведение определяют из координат «спинки» петли (рис. 7.16 а). Другой важной характеристикой являются кривые возврата. Эти кривые определяют значение остаточной индукции, которое реализуется в конкретном постоянном

магните под действием собственного размагничивающего поля и зависит от его формы.

Для определения прямых возврата (рис. 7.16 б) получают значение индукции в заданной точке  $B_e$ , установив поле  $H_e$ , затем выключают поле, измеряют  $\Delta B = B'_e - B_e$  и по двум точкам проводят прямую возврата.

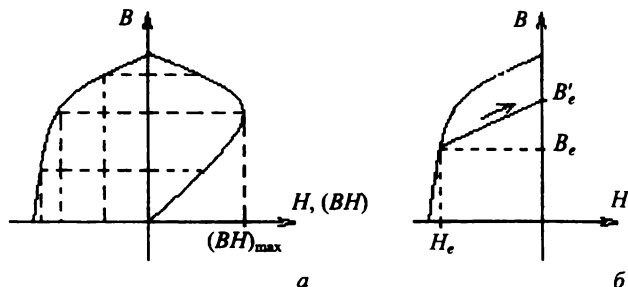


Рис. 7.16. Методика определения энергетического произведения (а) и кривых возврата (б)

Для магнитотвердых материалов разработана установка У541. В ней для намагничивания образцов применяют электромагниты, а для измерения поля — датчики Холла или индукционные преобразователи. Методики определения параметров магнитотвердых материалов также реализованы в автоматизированных установках, в которых необходимый алгоритм изменения намагничивающего тока и интегрирование соответствующих сигналов осуществляются с помощью компьютера.

## 7.4. Измерение намагниченности

Измерение намагниченности основывается на различных физических явлениях, сопутствующих возникновению намагниченности у тел. При этом используют:

- 1) измерение ЭДС, индуцируемой намагниченным образцом в ИК;
- 2) измерение силы, действующей на намагниченный образец в магнитном поле;

3) измерение магнитного поля, создаваемого намагниченным образцом;

4) магнитооптические эффекты, обусловленные взаимодействием плоско-поляризованного света с намагниченностью образца.

#### 7.4.1. Определение намагниченности по измерению ЭДС

Измерение намагниченности, основанное на явлении *электромагнитной индукции*, аналогично измерению магнитного потока. Пусть на образец, охваченный ИК с числом витков  $w$  и помещенный в намагничивающее устройство (соленоид), действует внешнее поле напряженностью  $H_e$ , намагничивающее его до значения намагниченности  $J$  (рис. 7.17).

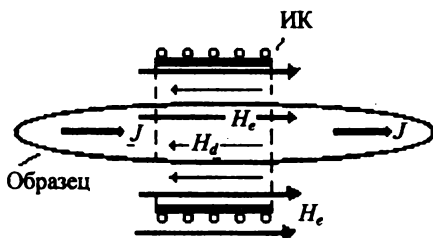


Рис. 7.17. Намагниченный образец в измерительной катушке

При этом форма образца должна удовлетворять условию однородности его намагничивания (тонкий длинный образец или образец в форме эллипсоида вращения). Напряженность поля внутри образца

$$H_i = H_e - H_d, \quad (7.74)$$

где  $H_d = NJ$  — размагничивающее поле образца. Тогда изменение суммарного потокоцепления через ИК —  $\Delta\psi$ , измеряемое при изменении намагничивающего поля, складывается из следующих составляющих:  $\Delta\psi = \Delta\psi_J + \Delta\psi_{H_e} - \Delta\psi_{H_d}$ :

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= w s_{\text{обр}} \mu_0 \Delta J + w s_{\kappa} \mu_0 \Delta H_e - w s_{\kappa} \mu_0 N \Delta J = \\ &= \mu_0 w [\Delta J (s_{\text{обр}} - N s_{\kappa}) + s_{\kappa} \Delta H_e]. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Отсюда расчетная формула для изменения намагниченности принимает следующий вид:

$$\Delta J = \left( \frac{\Delta \Psi}{\mu_0 w(s_{\text{обр}} - N s_k)} \right) - \frac{\Delta H_e}{\frac{s_{\text{обр}}}{s_k} - N}. \quad (7.76)$$

При малых значениях размагничивающего фактора ( $N \approx 0$ , длинный образец) расчетная формула (7.76) принимает вид:

$$\Delta J = \left( \frac{\Delta \Psi}{\mu_0 w s_{\text{обр}}} \right) - \frac{s_k}{s_{\text{обр}}} \Delta H_e. \quad (7.77)$$

Часто реализация данного метода позволяет вообще исключить необходимость расчета поправки. Поправку на поток, связанный с внешним магнитным полем, при измерениях можно электрически скомпенсировать, используя две идентичные катушки: измерительную и компенсационную. Для этого обе катушки включают встречно и помещают в двух идентичных последовательно соединенных соленоидах. Катушки могут быть размещены и в одном соленоиде на расстоянии, исключающем их взаимное влияние.

Модификацией данного способа измерения намагниченности является способ, при котором изменение потокосцепления создается не переключением магнитного поля, а сбросом ИК с образца в зоне однородного поля соленоида. При этом изменение потока поля через витки ИК равно нулю и в формуле (7.76) остается только первое слагаемое.

#### 7.4.2. Определение намагниченности по измерению силы

Одно из проявлений намагниченности состоит в силовом взаимодействии намагниченного тела с неоднородным магнитным полем. Пусть в неоднородном по величине (но не по направлению) магнитном поле, характеризуемом градиентом  $\frac{dH}{dx}$ , находится

образец размером  $l$ , так что  $l \frac{dH}{dx} \ll H$ , т. е. на протяжении  $l$  изменение напряженности поля мало (рис. 7.18). В таком поле образец приобретает примерно такой же магнитный момент, как и в однородном поле, и ориентируется по его направлению.

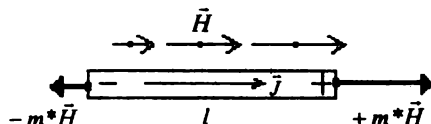


Рис. 7.18. Намагниченный образец в неоднородном магнитном поле

Так как магнитные полюса образца находятся в точках с неодинаковой напряженностью, а на изолированный полюс с зарядом  $m^*$  в поле  $H$  действует сила  $f = m^*H$ , то тело будет испытывать смещающую силу

$$F = m^*H - m^* \left( H - l \frac{dH}{dx} \right) = m^*l \frac{dH}{dx} = M \frac{dH}{dx} = VJ \frac{dH}{dx}. \quad (7.78)$$

Видно, что величина силы пропорциональна магнитному моменту тела  $M$  или намагниченности  $J$ ,  $V$  — объем образца.

Таким образом, для практической реализации данного способа необходимо создать магнитное поле с известным градиентом и измерить величину силы, действующей на образец в этом поле. Базирующиеся на этом принципе методы называют пондеромоторными, или силометрическими. Типичным их воплощением является *метод магнитных весов* (рис. 7.19). В этом методе весы позволяют измерить силу, втягивающую

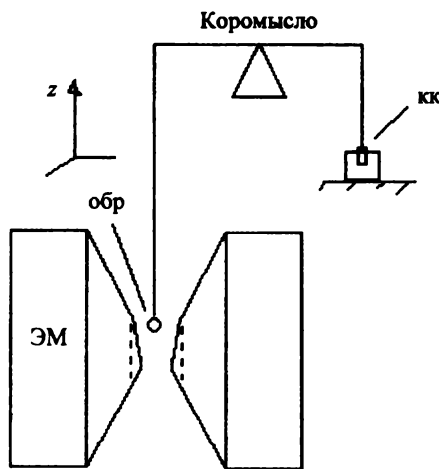


Рис. 7.19. Метод магнитных весов

образец в неоднородное магнитное поле, создаваемое полюсными наконечниками электромагнита. Если градиент поля в направлении  $z$ , перпендикулярном  $H$ , известен, то в соответствии с выражением (7.78) можно определить магнитный момент или намагниченность образца. Для автоматизации измерений на противоположном плече весов иногда размещают компенсационную катушку, помещенную в магнитную систему с полем радиальной симметрии. Для восстановления равновесия по катушке пропускают ток, и она втягивается в поле. О силе, действующей на намагниченный образец, судят по величине тока в компенсационной катушке. Этот метод наиболее часто используют для измерения восприимчивости слабомагнитных веществ.

Намагниченность сильномагнитных веществ можно измерить с помощью *маятникового магнитометра*, принцип действия которого также основан на силовом взаимодействии намагниченного образца с неоднородным полем (рис. 7.20).

Маятник магнитометра представляет собой крестовину, выполненную из немагнитного материала (медь, кварц). Крестовина опирается стальными иглами на твердую опору и может свободно

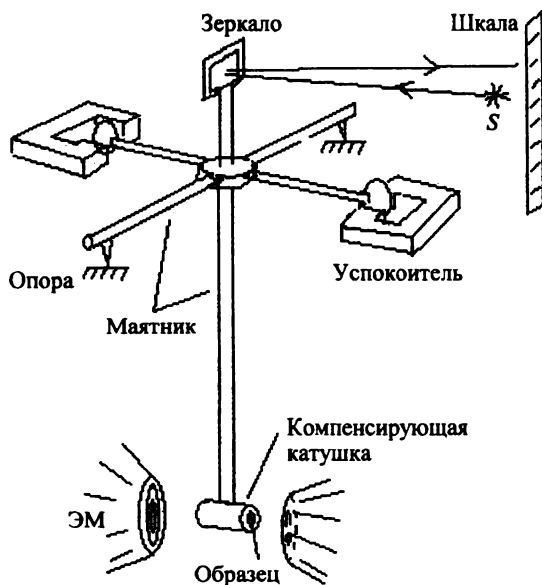


Рис. 7.20. Метод маятникового магнитометра



колебаться. В качестве успокоителя колебаний используют медные пластины, помещенные в поле постоянных магнитов. На шток крестовины крепится компенсирующая катушка с большим количеством витков и помещенным в нее образцом. Образец намагничивается электромагнитом, создающим с помощью полюсов специальной формы неоднородное магнитное поле. Под воздействием силы, действующей на образец, крестовина поворачивается, о чем можно судить по шкале, на которую падает луч, отраженный от зеркальца, укрепленного на крестовине. Пропуская по катушке ток определенной величины, можно скомпенсировать магнитный момент образца магнитным моментом катушки, фиксируя момент уравнивания по возврату луча в исходное положение на шкале. Намагниченность образца определяют по величине тока в катушке.

### 7.4.3. Определение намагниченности по измерению поля рассеяния

Другая группа методов измерения намагниченности использует регистрацию магнитного поля, создаваемого намагниченным образцом. Это так называемые *магнитометрические методы*. При этом в качестве первичного преобразователя используют либо одиночный вытянутый постоянный магнит (магнитную стрелку), либо астатическую систему из двух магнитов, либо вибрирующую ИК (иногда вибрирует образец).

**Метод магнитной стрелки.** Пусть магнитная стрелка с магнитным моментом  $\vec{m}$  подвешена на упругой нити (рис. 7.21).

Стрелка помещается в однородное магнитное поле  $\vec{H}$ . Тогда на нее со стороны поля действует крутящий момент  $\vec{P}$ , стремящийся повернуть ее вдоль поля,

$$P = mH \sin \theta. \quad (7.79)$$

С другой стороны, намагниченный образец создает в пространстве магнитное поле рассеяния (рис. 7.22).

Если рассматривать образец как неподвижный магнитный диполь с магнитным моментом  $\vec{M}$ , то напряженность поля от намагниченного образца в произвольной точке пространства А можно представить в виде двух составляющих  $H_r$  и  $H_\phi$ :

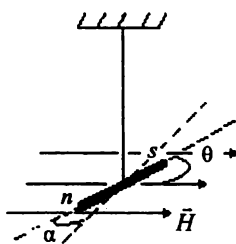


Рис. 7.21. Магнитная стрелка в магнитном поле

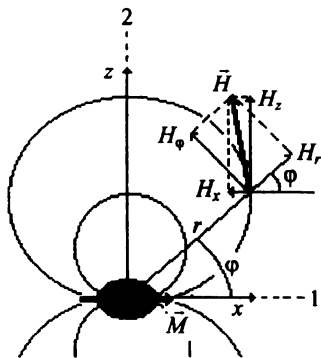


Рис. 7.22. Магнитное поле вокруг намагниченного образца

$$H_r = \left( \frac{M}{2\pi r^3} \right) \cos \varphi \left( 1 + \frac{p^{(1)}}{r^2} + \dots \right), \quad (7.80)$$

$$H_\varphi = \left( \frac{M}{4\pi r^3} \right) \sin \varphi \left( 1 + \frac{p^{(2)}}{r^2} + \dots \right), \quad (7.81)$$

где  $\varphi$  — угол между направлением магнитного момента диполя и радиус-вектором  $\vec{r}$ , проведенным из центра диполя в данную точку;  $p^{(1, 2)}$  — коэффициенты распределения, зависящие от размеров и формы образца. Для практики магнитных измерений важны два частных случая положения магнитной стрелки по отношению к источнику магнитного поля образцу-диполю:

1.  $\varphi = 0^\circ$ , когда точка находится на продолжении оси диполя — *первое гауссово положение*;

2.  $\varphi = 90^\circ$ , когда точка находится в плоскости, перпендикулярной оси диполя и проходящей через центр диполя — *второе гауссово положение*

Можно показать, что для этих двух положений магнитное поле образца-диполя в упрощенном виде задается следующими выражениями:

$$H_1 = \left( \frac{M}{2\pi r^3} \right) \left( 1 + \frac{l^2}{2r^2} \right), \quad (7.82)$$

$$H_2 = \left( \frac{M}{4\pi r^3} \right) \left( 1 - \frac{3l^2}{4r^2} \right), \quad (7.83)$$

где  $l$  — длина диполя, в данном случае — это размер образца. Направление вектора напряженности поля рассеяния в обоих положениях параллельно оси эквивалентного диполя, т. е.  $H_z = 0$ ,  $H_x = H$  (рис. 7.22).

Для измерения магнитного момента образца магнитную стрелку помещают в положение 1 или 2. При соблюдении условия  $l \ll r$  поле от образца в месте расположения магнитной стрелки можно приближенно считать однородным, а формулы (7.82)—(7.83) приобретают наиболее простой вид. С учетом этого выражение для крутящего момента магнитной стрелки (7.79) в поле намагниченного образца принимает следующий вид (для определенности воспользуемся 1-м гауссовым положением, а также учтем, что для достижения максимальной чувствительности к  $x$ -компоненте поля рассеяния от образца магнитную стрелку в обоих положениях следует ориентировать так, чтобы  $\theta = 90^\circ$ ):

$$P = \frac{Mm}{2\pi r^3}. \quad (7.84)$$

Кроме момента  $P$ , на магнитную стрелку будет также действовать момент упругости закручивающейся нити:  $L = D\alpha$ , где  $\alpha$  — угол закручивания нити;  $D$  — удельный момент кручения нити. Из условия равновесия  $L = P$  при повороте системы на малый угол  $\alpha$  имеем  $D\alpha = P \sin(90 - \alpha)$ . Откуда после подстановки выражения для  $P$  находим уравнение преобразования метода:

$$\alpha = \left( \frac{m}{D2\pi r^3} \right) M \cos \alpha \approx \left( \frac{m}{2D\pi r^3} \right) M = kVJ. \quad (7.85)$$

Из полученного выражения видно, что по углу закручивания нити  $\alpha$  можно определить величину магнитного момента образца  $M$  и его намагниченность  $J$ .

Выражение в скобках определяет чувствительность данного способа, которая зависит от магнитного момента стрелки, удельного момента закручивания подвеса и расстояния от стрелки

до образца. Определение чувствительности, как правило, осуществляют либо по *эталонному образцу*, либо с помощью катушки с током, магнитный момент которой легко рассчитать. Это связано с тем, что выражения (7.80)—(7.81) для поля получены приближенно и существует сложность с точным определением расстояния  $r$  до геометрического центра образца. При соблюдении идентичности объема и конфигурации образца и эталона отпадает необходимость в учете коэффициентов распределения, а магнитный момент образца определяется из следующего соотношения:

$$\frac{M_{\text{обр}}}{H_{\text{обр}}} = \frac{M_{\text{эт}}}{H_{\text{эт}}} \Rightarrow M_{\text{обр}} = \frac{H_{\text{обр}}}{H_{\text{эт}}} M_{\text{эт}} = \frac{\alpha_{\text{обр}}}{\alpha_{\text{эт}}} M_{\text{эт}}. \quad (7.86)$$

Недостатком описанного способа является его чувствительность к посторонним внешним однородным полям. Для исключения такого влияния в магнитометрах чаще используют астатическую систему.

**Астатический магнитометр.** Подвижная система астатического магнитометра состоит из двух идентичных магнетиков (магнитных стрелок), закрепленных на жестком держателе параллельно друг другу полюсами в противоположные стороны. Суммарный магнитный момент такой системы равен нулю, и она не реагирует на посторонние однородные статические поля. Образец размещают таким образом, чтобы его центр находился на уровне центра подвижной системы, а расстояние между ними  $r_1$  делают таким, чтобы можно было считать, что размер магнетиков много меньше этого расстояния (рис. 7.23).

Магнитное поле намагниченного образца с магнитным моментом  $M$  по-прежнему задается (7.80)—(7.81).

В неоднородном поле на оба магнетика подвижной системы с моментами  $\vec{m}$  начинают действовать вращающие моменты одного и того же направления закручивания. Эти моменты создаются только горизонтальными составляющими поля  $H_x$ , которые, как можно видеть из рис. 7.23, по модулю равны между собой и могут быть выражены через  $x$ -компоненты соответствующих составляющих  $H_r$  и  $H_\varphi$ :

$$H_{x1} = H_{x2} = H_x = H_r^x + H_\varphi^x = \frac{3M \sin \varphi \cos \varphi}{4\pi r_2^3}. \quad (7.87)$$

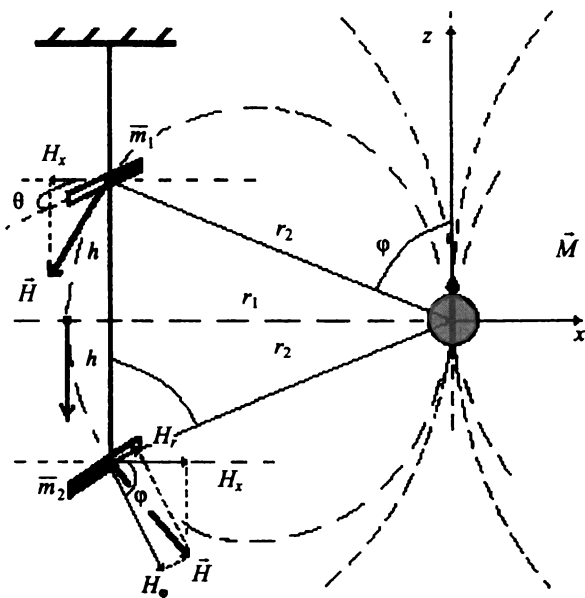


Рис. 7.23. Воздействие магнитного поля образца на аstaticкий подвес

Тогда для всей аstaticеской системы с учетом  $\theta = 90^\circ$  (характеризует начальную ориентацию магнитиков к горизонтальной составляющей поля от образца) и следующего из рис. 7.23 соотношения  $\sin\phi \cos\phi = hr_1/r_2^2$  выражение для вращающего момента, действующего на всю аstaticескую систему со стороны неоднородного поля образца, имеет вид

$$P = 2H_x m \sin\theta = 2H_x m = \frac{3mMhr_1}{2\pi r_2^5}. \quad (7.88)$$

Этот момент уравнивается моментом вращения, создаваемым упругой нитью подвеса. При повороте системы на угол  $\alpha$  от исходного положения условие равновесия принимает вид

$$(2H_x m) \cos\alpha = D\alpha. \quad (7.89)$$

С учетом малости угла  $\alpha$ :  $\cos\alpha = 1 - \alpha^2/2 \approx 1$ , учтем также, что  $r_2 = \sqrt{r_1^2 + h^2}$ , тогда находим

$$M = \left\{ \frac{2\pi D(r_1^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}{3mhr_1} \right\} \alpha. \quad (7.90)$$

Таким образом, и в этом случае имеем пропорциональность между углом закручивания нити подвеса и величиной магнитного момента образца. На практике градуировку измерительной системы производят по эталонному образцу или катушке с током. Отсчет угла поворота подвесной системы осуществляют с помощью закрепленного на ней легкого зеркала, отраженного от зеркала луча света и шкалы.

В аstaticеских магнитометрах намагничивание образца осуществляют с помощью соленоида, поэтому возникает необходимость компенсации воздействия неоднородного поля соленоида на аstaticескую систему. Ее осуществляют путем размещения по другую сторону от подвижной системы еще одного идентичного соленоида. При этом воздействие магнитного поля образца на аstaticескую систему можно компенсировать с помощью специальной катушки, размещенной во втором соленоиде, а магнитный момент образца — рассчитывать по току в компенсационной катушке.

**Метод вибромагнитометра** также принадлежит к рассматриваемой группе методов, связанных с регистрацией поля от намагниченного образца. Суть метода состоит в том, что находящийся в горизонтально ориентированном поле электромагнита образец с объемом  $V$  колеблется вдоль вертикальной оси с низкой частотой  $\sim 80$  Гц и амплитудой  $\sim 0,1$  мм (рис. 7.24). Поле рассеяния  $\vec{H}$ , обусловленное намагниченностью образца  $\vec{J} = \frac{\vec{M}}{V}$ , создает осциллирующий поток в расположенной поблизости ИК сечением  $s$ , с числом витков  $w$ . Сигнал переменного тока в ИК служит мерой намагниченности образца.

Обычно используют одну или две пары ИК, расположенных симметрично относительно образца. Оси намотки ИК могут быть

ориентированы параллельно или перпендикулярно полюсным наконечникам. Если ИК ориентирована своей плоскостью параллельно плоскости полюсов, то она регистрирует только горизонтальную составляющую поля рассеяния образца, если перпендикулярно, то только вертикальную.

Получим уравнение преобразования, лежащее в основе метода, заметив, что приводимые расчеты, в силу уже указанных выше причин, неточны и призваны главным образом проиллюстрировать принцип, реализованный в этом методе.

Пусть периодическое перемещение образца задается гармонической функцией  $z = A \sin \omega t$ . Тогда для мгновенного значения ЭДС в ИК в соответствии с законом индукции имеем

$$e = -ws \frac{d(\mu_0 H)}{dt} = -ws \frac{d(\mu_0 H)}{dz} \frac{dz}{dt} = -\mu_0 A \omega w s \frac{dH}{dz} \cos \omega t. \quad (7.91)$$

Интегрируя  $e$  за половину периода и полагая, что градиент поля рассеяния  $dH/dz$  остается постоянным в месте расположения ИК в силу малости амплитуды смещения образца, получим среднее значение измеряемого сигнала:

$$E_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e dt = 4\mu_0 A f w s \frac{dH}{dz} = k \frac{dH}{dz}, \quad (7.92)$$

где  $f = 1/T$  — линейная частота осцилляций.

Следуя (7.80)—(7.81), представим поле от образца-диполя в виде  $H = MF(r, \varphi)$ . Здесь  $F(r, \varphi)$  — некоторая функция, определяемая взаимным расположением образца-диполя и ИК или точки,

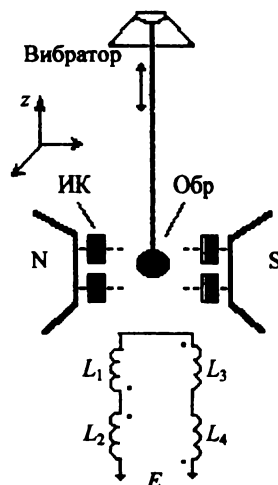


Рис. 7.24. Функциональная схема вибромагнитометра

в которой рассматривается поле. Так как магнитный момент образца постоянен, то можно записать

$$E_{\text{cp}} = kM \left\{ \frac{dF(r, \varphi)}{dz} \right\} = k'M = k'VJ. \quad (7.93)$$

Из (7.80)—(7.81) видно, что множитель в фигурных скобках дает зависимость измеряемого сигнала от расстояния вида  $\sim r^{-4}$ , оказывая значительное влияние на погрешность измерения. Для уменьшения этой погрешности используют специальное расположение относительно образца и включение пар измерительных катушек (см. рис. 7.24).

На практике для градуировки установки используют эталонный образец с известной намагниченностью, а расчет удельной намагниченности образца  $\sigma_{\text{об}}$  производят по формуле

$$\sigma_{\text{об}} = \frac{\sigma_{\text{эт}} m_{\text{эт}}}{E_{\text{эт}} m_{\text{об}}} E_{\text{об}}. \quad (7.94)$$

При измерении намагниченности методом вибромагнитометра, а также в других методах, использующих электромагнит в качестве источника намагничивающего поля, необходимо учитывать поправку на действие *магнитного изображения*.

Явление «магнитного изображения» наблюдается в области высоких полей и заключается во внезапном изменении (уменьшении или росте) измеренных значений намагниченности исследуемых образцов. В этой области полей материал полюсных наконечников магнитопровода приближается к насыщению, а его магнитная проницаемость сильно уменьшается. Парадокс «уменьшения» или «роста» намагниченности образца с увеличением поля объясняется тем, что снижение проницаемости магнитопровода приводит к уменьшению возможностей замыкания магнитного потока полей рассеяния от образца через магнитопровод и замыканию потока между полюсами самого образца. Поскольку ИК располагают обычно вблизи плоскости полюсов магнитопровода, то при этом они и регистрируют возрастание или снижение сигнала ЭДС в зависимости от того, настроены ИК на измерение горизонтальной или вертикальной составляющей полей рассеяния образца. Введение поправки на действие «маг-



нитного изображения» осуществляют путем измерения намагниченности насыщения эталонного образца в данной области намагничивающих полей. Тем не менее проведение измерений в этой области негативно сказывается на точности измерений.

В вибромагнитометрах применяют намагничивающие устройства двух видов: электромагниты и соленоиды. Причем при использовании соленоидов эффект «магнитного изображения» отсутствует. Простейший преобразователь вибромагнитометра с соленоидом представляет собой катушку из двух кольцевых секций радиуса  $r$ , включенных встречно и расположенных на расстоянии  $0,785r$  (рис. 7.25). Рабочая зона такого преобразователя ограничена сферой радиуса  $0,2r$  (рабочая зона определяется как область пространства, где градиент магнитного поля тока, протекающего по его обмотке, постоянен).

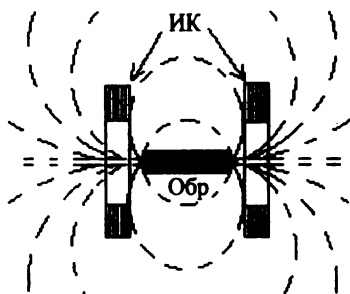


Рис. 7.25. Расположение ИК вибромагнитометра с соленоидом

В данной конфигурации измерение намагниченности осуществляется по измеренным значениям компоненты полей рассеяния образца, параллельной его намагниченности.

## 7.5. Методы измерения напряженности магнитного поля

Определение напряженности магнитного поля в рабочем объеме и поля внутри исследуемого образца является одной из главных задач магнитных измерений. Соответственно методы измерения

в обоих случаях принципиально не различаются, однако с учетом специфики некоторые методы адаптированы для проведения измерений внутреннего поля.

### 7.5.1. Физические основы измерения напряженности внутреннего магнитного поля

В зависимости от вида магнитной цепи магнитное поле в образце по величине может и не совпадать с внешним полем. Расчетным путем напряженность внутреннего поля можно найти только в образцах в виде кольца и тороида ( $H_i = H_e$ ) либо в образцах в виде эллипсоидов вращения ( $H_i = H_e - NJ$ ). В остальных случаях предпочтительным является экспериментальное определение величины поля в образце. Принципиально методы определения внутреннего поля, действующего в образце, основываются на неизменности тангенциальной составляющей поля на границе двух сред.

Рассмотрим эту ситуацию подробнее. Пусть через небольшой плоский участок площадью  $S$ , являющийся частью поверхности раздела двух изотропных сред с магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , проходит магнитный поток  $\Phi$  (рис. 7.26).

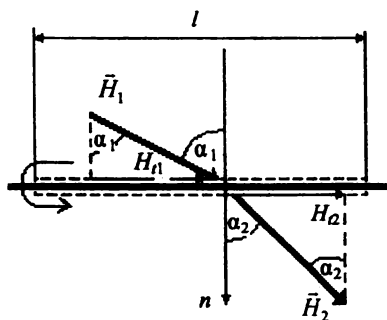


Рис. 7.26. Магнитное поле на границе раздела двух сред

Как изменится магнитное поле при переходе из первой среды во вторую?

В изотропной среде вектор магнитной индукции совпадает по направлению с вектором напряженности магнитного поля. Поэтому  $\vec{H}_1 \parallel \vec{B}_1$ , а  $\vec{H}_2 \parallel \vec{B}_2$ . Проведем на поверхности раздела сред

замкнутый контур в виде прямоугольника с длинной стороной  $l$ . Пусть поперечные размеры контура столь малы, что их можно не учитывать. Тогда общая длина контура составит  $2l$ . По закону полного тока при обходе по выбранному контуру получим  $H_1 \sin \alpha_1 l - H_2 \sin \alpha_2 l = \Sigma I_i$  или

$$H_{1l} - H_{2l} = \Sigma I_i. \quad (7.95)$$

При отсутствии макротоков, идущих по поверхности раздела сред —  $\Sigma I_i = 0$ , тогда из (7.95) для тангенциальных составляющих поля в обеих средах следует

$$H_{1l} = H_{2l}. \quad (7.96)$$

Таким образом, на границе раздела двух сред выполняется непрерывность тангенциальной составляющей напряженности поля.

Как изменится магнитная индукция при переходе из первой среды во вторую? Вследствие различия проницаемостей значения магнитной индукции  $B_1$  и  $B_2$  неодинаковы (см. рисунок). По определению магнитного потока через участок площадью  $S$  в первой среде  $\Phi_1 = B_1 S \cos \alpha_1$ , во второй —  $\Phi_2 = B_2 S \cos \alpha_2$ . Полагая, что рассеяние магнитного потока отсутствует (условие непрерывности потока), получаем  $B_1 \cos \alpha_1 S = B_2 \cos \alpha_2 S$ , или

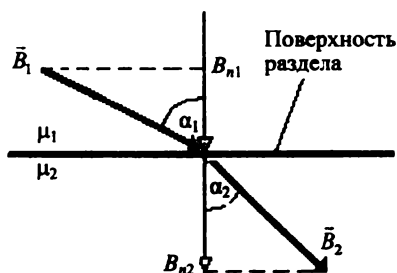
$$B_{n1} = B_{n2}, \quad (19д)$$

т. е. нормальная составляющая магнитной индукции на границе раздела двух сред является непрерывной.

Оба предыдущих заключения позволяют получить еще и закон преломления магнитных линий на границе раздела двух сред. После почленного деления (19д) на (7.96) получим

$$\frac{H_1 \sin \alpha_1}{B_1 \cos \alpha_1} = \frac{H_2 \sin \alpha_2}{B_2 \cos \alpha_2} \Rightarrow \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1}. \quad (20д)$$

Видно, что если 1-я среда — ферромагнетик, а 2-я — воздух ( $\mu_1 \gg \gg \mu_2$ ), то  $\tan \alpha_2 \approx 0$  и  $\alpha_2 \approx 0$ , т. е. при переходе линий магнитной индукции



из ферромагнетика ( $\mu_1$ ) в среду с малой проницаемостью  $\mu_2$  в этой среде (например, в воздухе) линии индукции будут направлены практически перпендикулярно поверхности раздела.

Итак, тангенциальная составляющая напряженности поля на поверхности образца и непосредственно под его поверхностью равны. Это обстоятельство используют для экспериментального определения напряженности магнитного поля в исследуемом образце с помощью разного рода преобразователей.

При проведении измерений внутреннего поля необходимо соблюдение следующих условий:

1. Однородность намагничивания образца. Если внутреннее поле в образце однородно, то его значение может быть определено по величине поля на поверхности, если же это условие не соблюдено, то проведение измерений некорректно.

2. Учет поправки на удаленность преобразователя от поверхности образца. Одним из источников погрешности при измерении величины напряженности внутреннего поля является то, что реально измерительный преобразователь располагается не на поверхности, а на некотором удалении от нее, определяемом конструкцией датчика. Опыт показывает, что обычно на расстоянии 0,2—0,5 мм от поверхности образца напряженность поля отличается от напряженности на поверхности образца не более чем на 1 %. Тем не менее в ряде случаев необходимо введение экстраполяционной поправки на основании проведения измерений поля на разных расстояниях от образца. Экспериментально было установлено, что изменение  $H_z$  с удалением от поверхности образца носит нелинейный характер и поле уменьшается тем быстрее, чем меньше  $l/d$  образца (отношение толщины к диаметру), т. е. чем короче образец и чем больше магнитная проницаемость материала образца.

3. Контроль за ориентацией преобразователя по отношению к плоскости образца. Соблюдение этого условия необходимо для исключения вклада нормальной компоненты полей рассеяния от образца разомкнутой формы на результат измерения  $H_z$ , для чего необходима строгая ориентация оси преобразователя вдоль направления измеряемого поля  $H_z$ .

### 7.5.2. Плоские накладные катушки — катушки поля

Рассмотрим устройство и работу некоторых преобразователей, используемых для измерения напряженности магнитного поля на поверхности исследуемых образцов

Плоские накладные катушки — катушки поля изготавливают, навивая обмотку на тонкую пластину из изоляционного материала (рис. 7.27). Число рядов намотки делают четным, чтобы можно было легко свить отходящие провода для компенсации наводок в них. Размеры катушки выбирают такими, чтобы магнитное поле образца в месте расположения катушки было однородным.

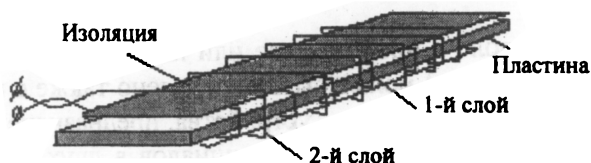


Рис. 7.27. Устройство катушек поля

Катушку делают достаточно тонкой (0,5—1,5 мм) и располагают непосредственно на поверхности образца так, чтобы можно было считать, что она находится в поле, равном полю в образце, и так, чтобы ее ось совпадала с направлением поля.

Определение напряженности поля с помощью накладных катушек основано на измерении магнитного потока, пронизывающего катушку, при отключении или переключении направления поля в образце. Применяют также поворот катушки на поверхности образца на 180°, а иногда для увеличения чувствительности — вращение катушки вблизи поверхности образца с постоянной угловой скоростью. При переключении направления с учетом того, что в исходном положении ось катушки совпадает с направлением измеряемого поля, имеем:

$$\Delta\Psi = w\mu_0(H^+ - H^-)S = 2\mu_0wSH, \quad (7.97)$$

где  $w$ ,  $S$  — число витков и поперечное сечение катушки поля. Из (7.97) для напряженности измеряемого поля  $H$  получаем

$$H = \frac{\Delta\Psi}{2\mu_0wS}. \quad (7.98)$$

Таким образом, соединив концы катушки с флюксметром и измерив изменение потока, можно рассчитать величину напряженности поля. Произведение  $wS$  является постоянной катушки, которая, как правило, определяется экспериментально с помощью соленоида с известной константой. В этом случае поле известно:  $H = CI$ , а постоянная катушки, в соответствии с (7.98), равна

$$k = wS = \frac{\Delta\Psi}{2\mu_0 CI}. \quad (7.99)$$

### 7.5.3. Магнитный потенциалметр

Магнитное поле в пространстве или на поверхности образца (т. е. внутреннее поле) может быть определено также с помощью магнитного потенциалметра — устройства, предназначенного для измерения разности магнитных потенциалов в двух точках пространства. Потенциалметр может быть гибким или жестким. Для измерения внутреннего поля используют жесткие потенциалметры, выполненные в виде полукольца с фиксированным расстоянием между его концами (рис. 7.28).

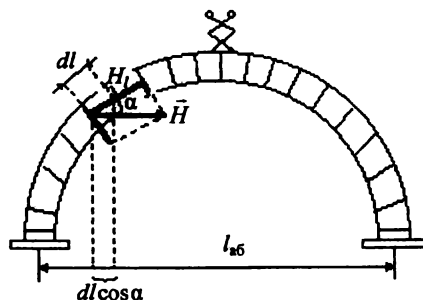


Рис. 7.28. Устройство потенциалметра

Потенциалметр представляет собой плоскую катушку с равномерно распределенными витками одинакового сечения. Обмотка состоит из четного числа слоев витков, намотанных в одну сторону, начиная от середины к краям, концы обмотки выводятся в середине катушки, для поддержания обмотки на концах размещены «башмаки».

Пусть плотность витков обмотки жесткого потенциалметра в виде полукольца  $w_0 = \frac{w}{l}$ , площадь его поперечного сечения  $S$ . Тогда потокосцепление на длине  $dl$  потенциалметра, помещенного в постоянное магнитное поле, равно

$$d\Psi = \mu_0 H_l S w_0 dl, \quad (7.100)$$

где  $H_l = H \cos \alpha$  — касательная составляющая вектора напряженности поля — проекция на направление  $dl$ . Полное потокосцепление потенциалметра

$$\Psi = \mu_0 w_0 S \int_a^b H_l dl = \mu_0 w_0 S U_{ab}, \quad (7.101)$$

где  $U_{ab}$  — разность магнитных потенциалов (магнитное напряжение) в точках а и б, в которых расположены концы потенциалметра. Видно, что потокосцепление потенциалметра пропорционально магнитному напряжению между его концами. При измерении однородного поля получаем

$$\Psi = \mu_0 w_0 S \int_a^b H_l dl = \mu_0 w_0 S H \int_a^b \cos \alpha dl = \mu_0 \frac{w}{l} S H l_{ab}, \quad (7.102)$$

где  $l_{ab}$  — расстояние между концами потенциалметра.

Если соединить концы потенциалметра с флюксметром и отключить магнитное поле или удалить потенциалметр из поля, то возникнет изменение магнитного поля  $\Delta H = H$  и связанное с этим изменение потокосцепления с витками потенциалметра  $\Delta \Psi = \Psi$ . Измерив изменение потокосцепления, можно рассчитать напряженность поля.

Для вычисления поля необходимо знать постоянную потенциалметра, которая может быть рассчитана или определена экспериментально. Расчет основывается на том, что средняя длина полукольца ( $l$ ) и расстояние а—б ( $l_{ab}$ ) могут быть выражены через наружный и внутренний радиусы:  $l = \pi R_{cp} = \pi \{(R_n + R_b)/2\}$ ,  $l_{ab} = 2R_{cp}$ . Подставив  $l_{ab}$  и  $l$  в (7.102), получим

$$\Psi = \mu_0 \frac{w}{\pi R_{cp}} S H 2R_{cp} = \frac{2\mu_0 w S}{\pi} H = KH, \quad (7.103)$$

где  $K = \frac{2\mu_0 wS}{\pi}$  — постоянная потенциалметра. Откуда

$$H = \frac{\Psi}{K}. \quad (7.104)$$

Чаще постоянную жесткого потенциалметра определяют экспериментально по известному полю, например, в соленоиде с хорошо известной константой. Минимальная величина измеряемого этим способом поля имеет порядок долей эрстед.

#### 7.5.4. Феррозонд

Чувствительными преобразователями магнитного поля являются *магнитомодуляционные датчики*, или *феррозонды*. Принцип действия феррозонда основан на изменении магнитной проницаемости ферромагнитного сердечника из магнитомягкого материала, перемagnичиваемого переменным полем (поле возбуждения), при помещении его в постоянное поле, напряженность которого измеряется.

Простейший феррозондовый преобразователь (рис. 7.29 а) представляет собой стержень из магнитомягкого материала, на котором размещены две обмотки:  $w_1$  — обмотка возбуждения, которая служит для создания в сердечнике переменного магнитного потока, и  $w_2$  — измерительная обмотка. При прохождении

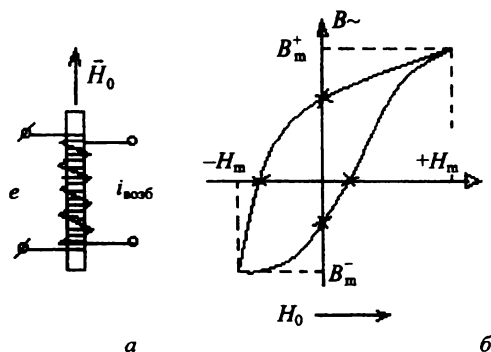


Рис. 7.29. Устройство (а) и работа (б) феррозонда



через обмотку возбуждения переменного тока синусоидальной формы магнитное состояние сердечника изменяется по динамической петле гистерезиса. При этом индукция в сердечнике изменяется не синусоидально, а в измерительной обмотке возникает ЭДС, которая, как известно, кроме основной частоты, содержит высшие нечетные гармоники.

Если зонд поместить в постоянное магнитное поле, направленное вдоль оси сердечника зонда, то форма динамической петли сердечника приобретет несимметричный вид (рис. 7.29 б). Вследствие этого при неизменной величине и форме переменного тока в обмотке возбуждения зонда изменятся величина и форма кривой ЭДС в измерительной обмотке: наряду с нечетными гармониками появятся четные, главным образом вторые гармоники.

Величина ЭДС второй гармоники пропорциональна напряженности постоянного магнитного поля, поэтому ЭДС второй гармоники используют для измерения поля.

Для упрощения выделения второй гармоники разработаны различные модификации сердечника феррозонда, например, феррозонд состоит из двух сердечников, либо сердечник выполнен в виде магнитного мостика.

На рис. 7.30 а представлен феррозонд с двумя идентичными сердечниками и схема соединений его обмоток. Обмотки возбуждения, питаемые от источника синусоидального напряжения  $U_f$ , соединены последовательно, создавая в каждый момент времени одинаковые и противоположно направленные магнитные потоки в обоих сердечниках. Амплитуда тока возбуждения должна быть

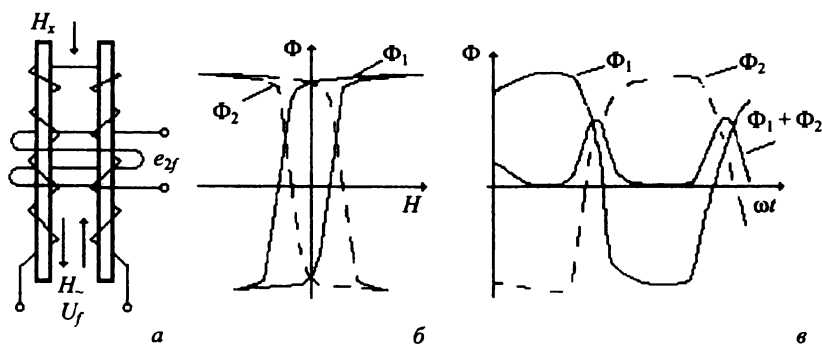


Рис. 7.30. Конструкция (а) и работа (б, в) двухсердечного феррозонда

достаточной для намагничивания сердечников практически до насыщения, а создаваемое им поле — значительно больше напряженности измеряемого поля  $H_x$ .

Измерительная обмотка  $w_2$  охватывает оба сердечника. При полной идентичности сердечников ЭДС, индуцируемая в ней, будет равна нулю.

При помещении преобразователя в постоянное поле  $H_x$  так, чтобы вектор напряженности поля совпадал с осью преобразователя, в каждый момент времени один из сердечников будет находиться под воздействием суммы полей  $H_- + H_x$ , а другой — под воздействием разности  $H_- - H_x$ . При этом динамические петли гистерезиса обоих сердечников приобретают смещение по оси полей и в измерительной обмотке появится сигнал ЭДС удвоенной частоты, обусловленный разностью потоков от сердечников (рис. 7.30 б).

Учитывая, что приращение индукции в сердечниках, обусловленное действием измеряемого поля, мало по сравнению с индукцией от поля возбуждения, можно функцию  $B(H_- \pm H_x)$  разложить в ряд Тейлора. Ограничиваясь тремя первыми членами, получим

$$B(H_- \pm H_x) = B(H_-) \pm \frac{dB}{dH_-} H_x + \frac{1}{2} \frac{d^2 B}{dH_-^2} H_x^2. \quad (7.105)$$

Обозначим  $B^+$  выражение (7.105) с плюсом, соответственно с минусом как  $B^-$ . Так как потоки в сердечниках направлены в разные стороны (рис. 7.30 в), то поток в измерительной обмотке —  $(B^+ s - B^- s)$ . При вычитании первый и третий члены разложения уничтожатся, а второй удвоится. Поскольку  $H_x$  постоянно, получим, что ЭДС в измерительной обмотке

$$e_2 = -w_2 s \frac{d(B^+ - B^-)}{dt} = -2w_2 s H_x \frac{d}{dt} \left( \frac{dB}{dH_-} \right) = -2w_2 s H_x \frac{d\mu_d}{dt}, \quad (7.106)$$

где  $\mu_d$  — дифференциальная проницаемость сердечников (не материала сердечников, так как они разомкнутой формы). Последнее выражение можно представить в виде

$$e_2 = - \left\{ 2w_2 s \frac{d\mu_d}{dH_-} \frac{dH_-}{dt} \right\} H_x. \quad (7.107)$$

Откуда окончательно видно, что

1) ЭДС на выходе преобразователя может служить мерой  $H_x$  как по величине, так и по направлению (поскольку при изменении направления  $H_x$  изменяется полярность ЭДС);

2) условием функционирования преобразователя является нелинейный характер кривой намагничивания сердечника, т. е. условие  $\frac{d\mu_d}{dH_x} \neq 0$ .

Детальный анализ работы преобразователя приводит к следующему выражению для его чувствительности:

$$C = \frac{E_{m2}}{H_x} = k\omega s w_2 \mu_{dm} \frac{H_s}{H_m}, \quad (7.108)$$

где  $E_{m2}$  — амплитуда второй гармоники ЭДС,  $\mu_{dm}$  — максимум дифференциальной проницаемости сердечников;  $H_s$  — напряженность поля насыщения сердечников;  $H_m$  — амплитуда напряженности поля возбуждения;  $\omega$  — циклическая частота поля возбуждения;  $k$  — коэффициент, обусловленный взаимным расположением сердечников.

Практически из-за неполной идентичности сердечников на выходе обмотки  $w_2$ , кроме второй гармоники, всегда имеется сигнал основной частоты, поэтому на выходе необходимо ставить селективный усилитель, настроенный на 2-ю гармонику.

### 7.5.5. Датчик на основе эффекта Холла

В последнее время широкое распространение для измерения напряженности магнитного поля получили преобразователи на основе гальваномагнитных эффектов, в частности на эффекте Холла. Эффект Холла может наблюдаться как в проводниках, так и в полупроводниках, причем в последних он более выражен.

*Эффектом Холла* называется эффект возникновения разности потенциалов ( $U_y$ ) в пластине проводника (или полупроводника) в направлении, ортогональном магнитному полю  $H_z$  и току  $i_x$ , текущему через проводник поперек магнитного поля (рис. 7.31).

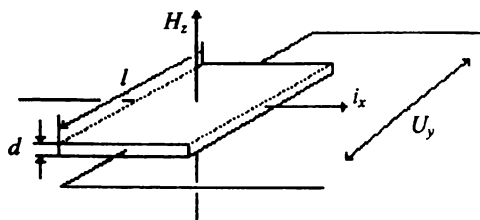


Рис. 7.31. К возникновению разности потенциалов Холла

Эффект Холла объясняется действием силы Лоренца на движущиеся заряженные частицы. Поскольку электрический ток есть поток электронов (или дырок), то сила тока

$$i_x = -|e|nv_x S_x, \quad (7.109)$$

где  $n$  — концентрация электронов;  $v_x$  — компонента скорости электронов вдоль оси  $x$ ;  $S_x$  — сечение пластины. Магнитное поле отклоняет поток электронов вследствие действия силы Лоренца:

$$\vec{F} = \mu_0 [\vec{j} \times \vec{H}_z], \quad (7.110)$$

где  $j_x = \frac{i_x}{S_x}$  — плотность тока. Это приводит к концентрации зарядов разного знака на боковых плоскостях пластины и возникновению электрического поля  $E_y$ . При этом на заряженные частицы начинает действовать сила

$$F_y = enE_y. \quad (7.111)$$

В стационарном состоянии эти силы уравнивают друг друга:

$$enE_y = \mu_0 \frac{i_x}{S_x} H_z.$$

Откуда для разности потенциалов Холла  $\left( E_y = \frac{U_y}{l} \right)$  имеем

$$U_y = \frac{1}{en} \frac{i_x \mu_0}{d} H_z = R_x \frac{i_x \mu_0}{d} H_z, \quad (7.112)$$

где  $d$  — толщина пластины;  $R_x$  — постоянная Холла, знак которой определяется знаком носителей заряда.

При использовании датчика Холла для измерения внутреннего поля следует иметь в виду воздействие магнитного поля тока питания на образец. Величина этого поля подмагничивания невелика ( $\sim 5$  А/м) и может быть учтена путем измерений при двух полярностях тока намагничивающего устройства с последующим усреднением полученных результатов. Необходимо учитывать также температурную погрешность, так как температура влияет на подвижность носителей. В лучших типах преобразователей эта погрешность составляет 0,02—0,1 %/град в диапазоне  $-40$ — $+100$  °С. Преобразователи Холла изготавливают в виде тонких пластин 0,1—0,5 мм, вырезанных из монокристаллов Ge, Si или соединений InAs, InSb, HgSe и др. Существуют пленочные преобразователи толщиной 1—20 мкм, полученные осаждением на подложку в вакууме.

## 7.6. Квантовые преобразователи и преобразователи на основе сверхпроводимости

### 7.6.1. Ядерные преобразователи

Эти преобразователи используют в приборах, предназначенных для измерения индукции магнитного поля в рабочем объеме с наибольшей точностью.

Известно, что ядра многих атомов обладают магнитным моментом  $\vec{M}$  и механическим моментом импульса  $\vec{P}$ , которые связаны соотношением

$$\vec{M} = \gamma \vec{P}, \quad (7.113)$$

где  $\gamma$  называется гиромагнитным, или магнетомеханическим, отношением и является константой для данного ядра.

Если вещество, ядра которого обладают магнитным моментом, поместить во внешнее магнитное поле с индукцией  $B$ , то магнитные моменты ядер будут прецессировать вокруг направления вектора  $\vec{B}$  с круговой частотой  $\omega$  (рис. 7.32). При этом частота прецессии и величина индукции поля связаны соотношением

$$\omega = \gamma B. \quad (7.114)$$

Наличие у ядра магнитного момента и его прецессия позволяют наблюдать явление ядерного магнитного резонанса. Если в плоскости, перпендикулярной индукции  $\vec{B}$ , создать переменное высокочастотное магнитное поле с индукцией  $B'$ , то *при частоте, равной частоте прецессии*, наступает явление резонансного поглощения энергии высокочастотного поля системой прецессирующих ядер — ядерный магнитный резонанс.

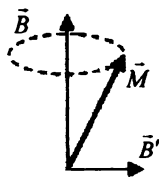


Рис. 7.32. К возникновению явления ядерного магнитного резонанса

Явление ядерного магнитного резонанса (ЯМР) используют для измерения магнитного поля. Зная сорт резонирующих ядер ( $\gamma$  определено), фиксируя частоту резонанса, а значит, и частоту прецессии, по уравнению (7.114) определяют величину индукции магнитного поля.

Для наблюдения ЯМР обычно используют резонанс протонов, для которых  $\gamma$  хорошо известно:  $\gamma_{\text{пр}} = 2,67513 \cdot 10^8 \text{ Тл}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ . В качестве преобразователей при этом используют воду, наблюдая резонанс на ядрах водорода — протонах. Используют также ядра дейтерия ( $^2\text{H}$ ) и лития ( $^7\text{Li}$ ).

Зафиксировать частоту ядерного магнитного резонанса можно по уменьшению амплитуды колебаний высокочастотного поля, которое обусловлено поглощением энергии ядрами вещества. При этом необходимо иметь в виду, что резонансный пик может быть размытым, благодаря следующим причинам:

- а) пространственной неоднородности измеряемого поля;
- б) резонансные частоты различных ядер могут несколько отличаться, так как каждое ядро, кроме внешнего поля, будет находиться еще и под воздействием поля, создаваемого магнитными моментами соседних ядер (которые могут отличаться из-за различных расстояний между соседними ядрами).

Рассмотрим конкретные методы реализации метода ЯМР для измерения магнитного поля.

**Метод резонансного поглощения.** В этом методе в качестве преобразователя используют ампулу с водой — 1 (рис. 7.33).

Ампула помещена в катушку 2, создающую высокочастотное поле  $B'$ . Ампула с катушкой в свою очередь помещена в измеряемое постоянное поле магнита NS так, что поля магнита и высокочастотной катушки перпендикулярны. Катушка 2 вместе с конденсатором  $C$  образует колебательный контур генератора высокой частоты (ГВЧ). Условие резонанса достигается регулировкой частоты ГВЧ, т. е. изменением частоты переменного поля  $B'$ .

Наступление резонанса можно наблюдать по уменьшению амплитуды высокочастотных колебаний. Но такой способ не очень удобен.

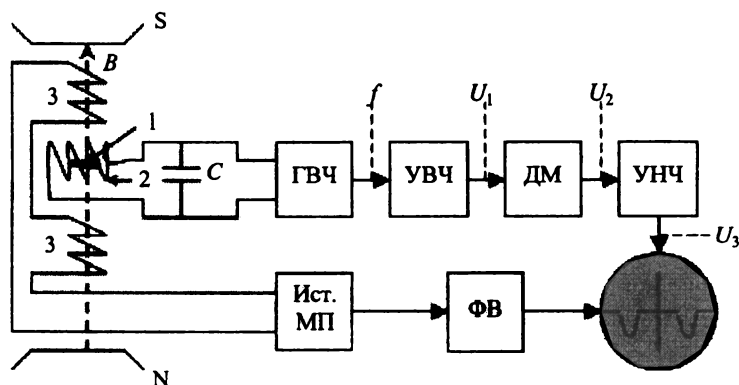


Рис. 7.33. Блок-схема установки для измерения магнитного поля по методу резонансного поглощения

Для лучшего выявления момента резонанса используют дополнительные катушки 3, с помощью которых модулируют величину постоянного поля вспомогательным полем низкой частоты и малой индукции  $B'' \sim 0,1$  мТл. Дополнительные катушки питаются источником модулирующего поля (Ист. МП).

В этом способе за период модуляции  $T_{\text{м}}$  условие резонанса выполняется дважды, когда модулирующий сигнал проходит нулевое значение, в эти моменты суммарное поле равно измеряемому полю  $B$ .

Проиллюстрируем работу установки с помощью диаграмм (рис. 7.34). На первой диаграмме представлена зависимость от времени измеряемого поля  $B$  (постоянное) и модулирующего  $B''$ .

На второй диаграмме — высокочастотный сигнал  $U_1$  с ГВЧ, усиленный услителем высокой частоты УВЧ и промодулированный сигналом ЯМР. Сигнал  $U_1$  затем поступает на демодулятор ДМ, который вырезает отрицательные полуволны и выделяет сигнал  $U_2$ , представленный на третьей диаграмме. Сигнал  $U_2$  усиливается

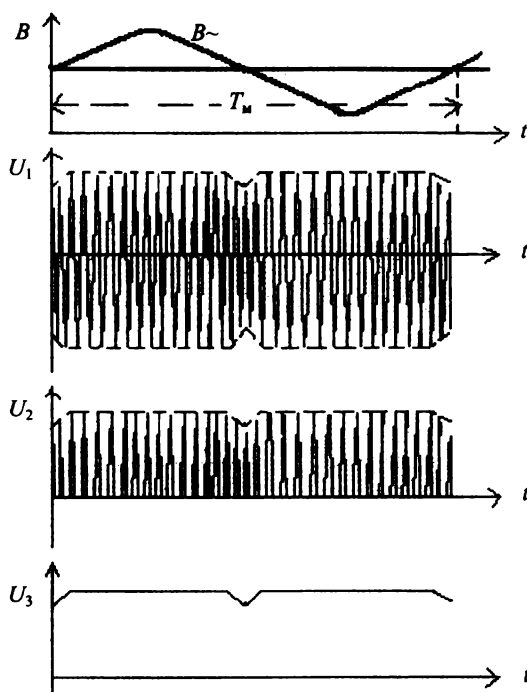


Рис. 7.34. Временные диаграммы к измерению магнитного поля по методу резонансного поглощения

усилителем низкой частоты, и после УНЧ сигнал  $U_3$  (диаграмма 4) подается на ось  $Y$  осциллографа. Этот сигнал в осциллографе синхронизируется с сигналом модуляции постоянного поля, подаваемого на ось  $X$  осциллографа с Ист. МП. При этом на экране осциллографа наблюдается два резонансных пика поглощения энергии высокочастотных колебаний за время, равное периоду модуляции  $T_m$  в моменты нулевых значений сигнала модуляции  $B$ . Регулировкой частоты ГВЧ добиваются полной синхронизации



сигналов  $X—Y$  и симметричного расположения резонансных сигналов относительно развертки. В этот момент остается только по частотомеру измерить частоту ГВЧ и по уравнению (7.114) рассчитать величину индукции измеряемого поля.

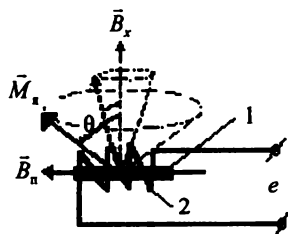
Частота в диапазоне обычного использования ЯМР (0,2—20 МГц) может быть измерена с погрешностью 0,001 % и гиромагнитное отношение известно с точностью ~0,001 %, поэтому метод ЯМР следует отнести к одному из самых точных для определения магнитного поля. Точность главным образом ограничивается неоднородностью поля в месте расположения преобразователя, что приводит к уширению резонансных линий.

Вынужденную прецессию ядер применяют для измерения средних по значению постоянных полей с индукцией  $5 \cdot 10^{-2} — 10$  Тл (0,5—100 кЭ).

**Метод свободной ядерной индукции.** Этот метод, также использующий явление ЯМР, основан на том, что при включении внешнего постоянного магнитного поля прецессирующая ядерная намагниченность ориентируется вдоль направления поля не мгновенно, а в течение некоторого времени, называемого *временем продольной релаксации*  $T_1$ . Объясняется это тем, что каждое ядро связано с окружающими его атомами и электронами и находится в состоянии термодинамического равновесия с ними. При включении поля это равновесие нарушается, а для установления нового необходимо время.

Реализуется данный метод следующим образом (рис. 7.35).

Рис. 7.35. К измерению магнитного поля по методу свободной ядерной индукции



Преобразователь 1, подобный описанному выше, помещается в сильное постоянное поляризующее поле  $B_n$  (~100 кА/м), которое заведомо больше измеряемого поля  $B_x$ . Поляризующее поле  $B_n$  создается катушкой 2. Поле  $B_n$  действует на преобразователь в течение времени большего, чем  $T_1$  (время продольной релаксации),

так что в результате ядерная намагниченность устанавливается вдоль  $B_z$ .

Затем поляризующее поле очень быстро выключается так, чтобы за время выключения вектор намагниченности практически не изменил своего направления. Тогда вектор намагниченности будет прецессировать вокруг измеряемого поля с убывающей амплитудой и уменьшением угла  $\theta$  с частотой

$$\omega = \gamma B_z. \quad (7.114')$$

При этом в катушке 2 (с числом витков  $w$  и сечением  $s$ ) будет наводиться ЭДС, затухающая с постоянной времени  $T_2$ . Для начального состояния при  $\theta = 90^\circ$

$$e = ws\omega B_z \sin\omega t, \quad (7.115)$$

где  $B_z$  — индукция вещества преобразователя. Амплитуда этой ЭДС, с учетом соотношения (7.114'), равна

$$E_m = wsB_z\gamma B_z. \quad (7.116)$$

При достаточном времени релаксации этот сигнал наблюдается в течение нескольких секунд и частота его может быть измерена. Например, для магнитного поля Земли (в качестве  $B_z$ ) и при использовании дистиллированной воды в качестве преобразователя ( $B_z = 5 \cdot 10^{-5}$  Тл,  $f = \omega/2\pi = 2100$  Гц), полагая  $w = 2500$ ,  $s = 10$  см<sup>2</sup>, получим  $E_m \sim 15$  мкВ.

### 7.6.2. Преобразователи электронного парамагнитного резонанса

Электронный парамагнитный резонанс (ЭПР) — это резонансное поглощение энергии высокочастотного магнитного поля электронами парамагнитного вещества.

Физически ЭПР и ЯМР имеют много общего. В случае ЯМР энергия поглощается ядерной магнитной системой, а в случае ЭПР — электронной. При наблюдении ЭПР также происходит прецессия магнитного момента электрона вокруг направления постоянного магнитного поля с частотой, задаваемой аналогичным (7.114) выражением:

$$\omega = \gamma B. \quad (7.117)$$

Однако частота ЭПР оказывается в  $\sim 10^3$  больше, чем при ЯМР, в связи с тем, что гиромагнитное отношение электрона, определяемое выражением

$$\gamma = \frac{e}{2mc}, \quad (7.118)$$

из-за разницы в массах протона и электрона ( $m_e/m_p = 1836$ ) оказывается в это же количество раз больше.

Благодаря большой частоте, сигнал ЭПР на несколько порядков больше сигнала от ядер. Это позволяет применять преобразователи малого объема и измерять индукции поля меньшей величины ( $1 \cdot 10^{-4} — 5 \cdot 10^{-4}$  Тл). Однако в связи с переходом в гигагерцовую область ( $f \sim 10^9$  Гц,  $\lambda \sim 3$  см) аппаратура ЭПР более громоздка, так как приходится применять волноводы.

Погрешность измерения с преобразователями ЭПР больше, чем ядерными преобразователями, и составляет  $\sim 0,1\%$ , что связано с большей шириной сигнала ЭПР.

### 7.6.3. Преобразователи на основе явления сверхпроводимости

Явление сверхпроводимости вместе с квантованием магнитного потока и эффектами Джозефсона лежит в основе работы сверхпроводящего квантового интерференционного устройства — СКВИДа (от английского SQID — Superconducting Quantum Interference Device), предназначенного для измерения магнитного потока.

*Сверхпроводимость* — это явление исчезновения сопротивления электрическому току в некоторых веществах при понижении их температуры ниже критической. Сверхпроводящее состояние может разрушить тепловое движение, если температура  $T > T_c$ , ток, если  $I > I_c$ , и магнитное поле, если  $H > H_c$ . Сверхпроводимость есть результат межэлектронного притяжения при взаимодействии электронов с решеткой кристалла и образования так называемых куперовских пар.

В 1933 г. В. Мейснер и Р. Оксенфельд установили, что при переходе образца в сверхпроводящее состояние магнитное поле из него выталкивается и магнитная индукция внутри массивного

сверхпроводника равна нулю (эффект Мейснера). Таким образом, токи в сверхпроводнике протекают лишь в тонком поверхностном слое. Они создают магнитное поле, компенсирующее внутри сверхпроводника внешнее поле.

**Квантование магнитного потока.** Если сверхпроводящее кольцо поместить в магнитное поле (рис. 7.36), то возбужденный при этом в нем ток может существовать бесконечно долго. Этот незатухающий ток и созданный им магнитный поток квантуются так, что «вмороженный» в кольцо магнитный поток принимает значения, кратные элементарному кванту потока:

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}, \quad (7.119)$$

где  $h$  — постоянная Планка,  $2e$  — электрический заряд куперовской пары. Квантование магнитного потока можно пояснить следующим образом. Сверхпроводящее состояние — это макроскопическое квантовое состояние, в котором все куперовские пары

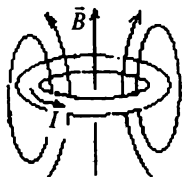


Рис. 7.36. Сверхпроводящее кольцо в магнитном поле

описываются единой волновой функцией, поэтому их движение по кольцу можно рассматривать как движение электрона по боровской орбите. При этом известное условие квантования импульса повлечет за собой квантование величины тока и, следовательно, связанного с ним магнитного потока.

**Эффекты Джозефсона.** Существуют два эффекта Джозефсона: стационарный и нестационарный.

*Стационарный эффект Джозефсона* заключается в том, что через тонкую изолирующую прокладку, разделяющую два сверхпроводника, может протекать сверхпроводящий ток путем квантового туннелирования куперовских пар через слой изолятора, когда его толщина меньше или порядка длины когерентности (характерного расстояния между электронами в куперовской паре, которое колеблется от  $10^{-5}$  до  $10^{-7}$  см).

Для микрочастиц в квантовой механике справедливо соотношение неопределенности, в соответствии с которым малая неопределенность координаты приводит к большой неопределенности импульса, что и позволяет частице оказаться за барьером-изолятором — совершить туннельный переход. При этом в двух сверхпроводниках устанавливается когерентное состояние, и они называются слабо связанными.

Сразу отметим, поскольку *через изолятор течет сверхпроводящий ток*, то падения напряжения на нем не возникает (рис. 7.37),

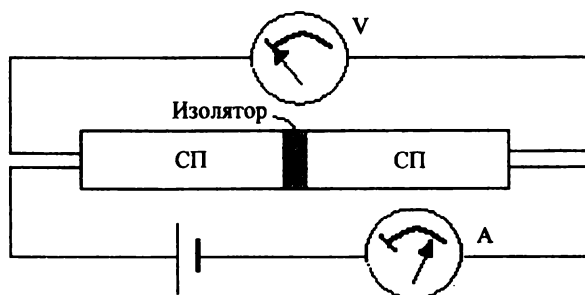


Рис. 7.37. К стационарному эффекту Джозефсона

а вольт-амперная характеристика перехода имеет вид, представленный на рис. 7.38 ( $I_c$  — критическое значение тока, при котором возникает падение напряжения на контакте — это параметр контакта, штрих — характеристика для реального сверхпроводника, штрих-пунктир — для нормального проводника).

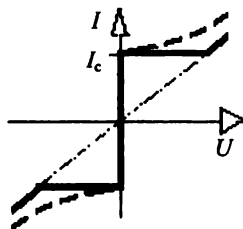


Рис. 7.38. Вольт-амперная характеристика перехода Джозефсона

Джозефсон получил выражение для тока через контакт

$$I = I_c \sin \theta, \quad (7.120)$$

где  $\theta$  — разность фаз волновых функций куперовских пар в сверхпроводниках по обе стороны от изолятора.

Действительно, если сверхпроводники разделены диэлектриком, то в каждом из них волновые функции куперовских пар будут иметь свою фазу, а результирующий ток через контакт оказывается пропорциональным синусу разности фаз. Джозефсон показал, что в области изолятора когерентные токи из обоих сверхпроводников будут интерферировать так же, как световые волны от двух когерентных источников. Поэтому результирующий ток оказывается пропорциональным синусу разности фаз.

Впоследствии было установлено, что величина критического тока через контакт  $I_m$  зависит от величины магнитного потока, проникающего в контакт (рис. 7.39, где  $I_c$  — критический ток в отсутствие поля).

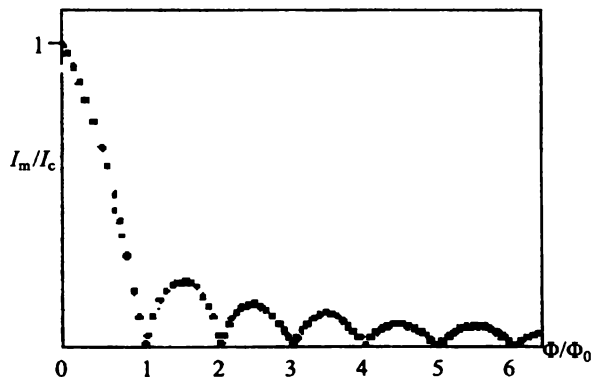


Рис. 7.39. Зависимость критического тока через контакт от магнитного потока, проникающего в контакт

Как видно из рис. 7.39, эта зависимость немонотонна, величина критического тока обращается в нуль в случае, когда поток равен целому числу квантов  $\Phi_0$ . Причем эта зависимость носит характер, аналогичный зависимости интенсивности света при дифракции на одиночной щели от расстояния до центральной точки. Сверхпроводящий туннельный переход может быть датчиком магнитного поля, так как его ток зависит от магнитного поля.

Суть второго, нестационарного эффекта Джозефсона заключается в том, что при  $I > I_c$  сверхпроводящий ток через контакт не исчезает, а наряду со сверхпроводящим током появляется

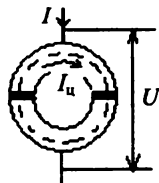
нормальный ток  $I_n = \frac{U}{R}$  (где  $R$  — сопротивление сверхпроводника при данной температуре), и результирующий ток начинает осциллировать так, что фиксируется излучение с  $f = 483,6$  МГц/мкВ. Осцилляция тока возникает потому, что разность фаз волновых функций куперовских пар по обе стороны контакта с нарушением слабой связи начинает нарастать (с периодом  $2\pi$ ) и в соответствии с (7.120) величина тока осциллирует с частотой, определяемой возникшей разностью потенциалов на контакте:

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta}{dt} = \frac{U}{\Phi_0}.$$

**СКВИД** — это сверхпроводящее кольцо с одним или двумя контактами Джозефсона (от английского SQUID — Superconducting Quantum Interference Device).

На рис. 7.40 изображен СКВИД постоянного тока с двумя слабыми звеньями, питаемый постоянным током смещения  $I$ .

Рис. 7.40. СКВИД постоянного тока



Если СКВИД поместить в изменяющееся магнитное поле, то величина экранирующих токов, циркулирующих в кольце,  $I_c$  может превысить критическое значение  $I_c$ . При этом на контакте возникнет напряжение  $U = d\Phi/dt$ , а поток будет проникать в кольцо в моменты, когда сверхпроводящая компонента тока из-за зависимости критического тока контакта от магнитного поля будет обращаться в нуль. Эта зависимость изменяет вольт-амперную характеристику перехода и приводит к периодическому изменению напряжения на контакте (рис. 7.41).

Причем каждый период напряжения будет связан с проникновением очередного кванта потока в кольцо. Измеряя периоды напряжения до окончательного проникновения всего потока в кольцо, можно измерить величину потока. Таким образом,

СКВИД можно рассматривать как преобразователь магнитного потока в напряжение.

СКВИДы широко используются как чувствительные элементы магнитных полей в магнитометрах с чувствительностью  $\sim 10^{-11}$  Гс для измерения биомagnetных полей в медицине, поля Земли с целью геологической разведки с самолетов и спутников, околоземных магнитных полей, для измерений в физике и дефектоскопии. Чувствительность датчиков СКВИДов — до  $10^{-14}$  Тл/Гц $^{1/2}$ .

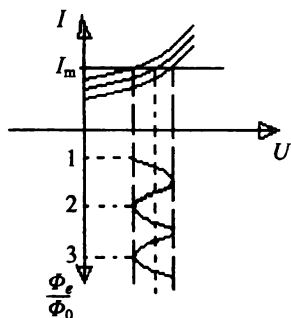


Рис. 7.41. Вольт-амперная характеристика перехода в СКВИД постоянного тока

На рис. 7.42 представлена схема СКВИД-магнитометра: Т — согласующий трансформатор, У1 — узкополосный усилитель с детектором, У2 — усилитель постоянного тока, Р — самописец.

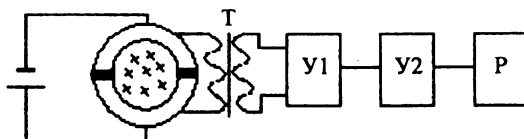


Рис. 7.42. Блок-схема СКВИД-магнитометра

Магнитный поток через сверхпроводящее кольцо изображен крестиками. Его изменение приводит к возникновению периодической ЭДС на входе усилителя У1.



## Глава 8

# ИЗМЕРЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МАГНИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ

### 8.1. Условия измерения

К числу основных динамических характеристик магнитных материалов относятся:

- динамическая кривая намагничивания;
- магнитная проницаемость — амплитудная и эффективная;
- динамическая петля перемагничивания;
- магнитные потери.

В отличие от статических характеристик, которые являются функцией свойств материала, динамические характеристики зависят также от размеров образца; частоты перемагничивания; формы кривой зависимости индукции от времени (режима перемагничивания).

Физическими причинами этой зависимости являются вихревые токи и эффект магнитного последействия.

*Вихревые электрические токи*, в частности *поверхностный эффект*, приводят к тому, что глубина проникновения переменного магнитного поля в образец зависит от частоты перемагничивания:

$$h = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu \sigma f}}, \text{ м}, \quad (8.1)$$

где  $f$  — частота,  $\sigma$  — проводимость,  $\mu$  — магнитная проницаемость материала. Поскольку поле проникает с двух сторон, то для полного промагничивания толщина образца должна быть  $d \leq 2h$ . Так, для пермаллоя в области начальной проницаемости ( $\mu_{\text{нач}} = 10\,000$ ) и  $f = 50$  Гц, глубина проникновения составляет 0,5 мм, а в области максимальной проницаемости ( $\mu_{\text{макс}} = 10^5$ ) — только 0,15 мм.

Эффект магнитного последствия приводит к отставанию величины индукции от величины поля. Например, при включении поля величина индукции будет нарастать в течение некоторого времени по закону

$$B(t) = B_0 + B_N(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (8.2)$$

или графически, как представлено на рис. 8.1.

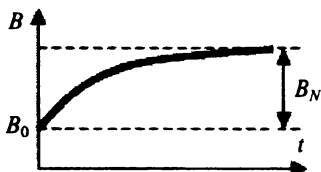
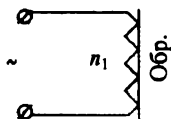


Рис. 8.1. Зависимость магнитной индукции от времени при быстром включении магнитного поля

Благодаря этим причинам, магнитная индукция на переменном токе может быть измерена только как средняя по сечению образца и будет зависеть от частоты перемагничивания.

Остановимся также на форме кривых индукции и поля и рассмотрим два случая режимов перемагничивания.

**Случай 1.** Пусть в намагничивающую обмотку образца подается переменное напряжение синусоидальной формы. Какова при этом будет форма кривой тока (поля)?



Для нахождения формы кривой намагничивающего тока в этом случае поступим следующим образом:

i) допустим, что магнитный поток в образце изменяется синусоидально:

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t; \quad (8.3)$$

ii) положим также, что поток рассеяния отсутствует (замкнутая магнитная цепь); тогда ЭДС самоиндукции, наводимая этим потоком в намагничивающей обмотке, составит

$$e_L = -n_1 \frac{d\Phi}{dt} = -n_1 \omega \Phi_m \cos \omega t = -E_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right); \quad (8.4)$$

iii) пусть  $R \ll \omega L$ , т. е. активное сопротивление обмотки много меньше ее индуктивного сопротивления (падение напряжения на нем отсутствует); тогда напряжение на зажимах обмотки равно по величине и противоположно по знаку ЭДС самоиндукции:

$$U = -e_L = E_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (8.5)$$

Таким образом, из (8.3) и (8.5) видно, что при синусоидальном напряжении на зажимах намагничивающей обмотки, при условии пренебрежения ее активным сопротивлением и потоком рассеяния, магнитный поток в образце изменяется также синусоидально, отставая по фазе от напряжения в намагничивающей обмотке на  $\pi/2$ , а его амплитуда

$$\Phi_m = \frac{E_m}{n_1 \omega} = \frac{U_m}{n_1 \omega}. \quad (8.6)$$

Теперь для ответа на вопрос о форме кривой тока воспользуемся знанием формы кривой  $\Phi(t)$ , которая является синусоидальной функцией времени, и формы динамического цикла (т. е.  $B(H)$  или по существу  $\Phi(i)$ ) и по точкам построим кривую  $i(t)$  (рис. 8.2).

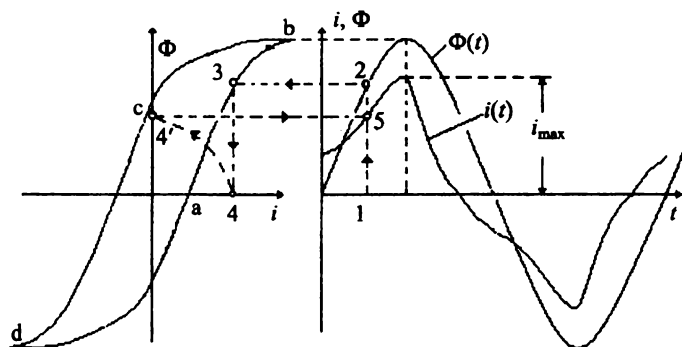


Рис. 8.2. Построение кривой тока по кривой магнитного потока и петле гистерезиса

Ординаты тока для первой четверти периода при построении определяем по абсциссам восходящей ветви петли (а — b). В момент времени 1 значение потока соответствует точке 2 на  $\Phi(t)$ ,

а также точке 3 на петле и определяется значением тока 4, отразив которое на ось ординат (4'), затем получим точку 5 на кривой  $i(t)$ . Для второй четверти периода — по абсциссам нисходящей ветви петли (b — c) и т. д. Благодаря нелинейной форме петли гистерезиса, форма кривой тока будет несинусоидальной.

Из рис. 8.2 видно:

- 1) форма кривой тока действительно несинусоидальная;
- 2) ток и магнитный поток одновременно достигают своих максимальных значений;
- 3) нулевых значений магнитный поток достигает позднее, чем ток.

Таким образом, если в намагничивающую обмотку ферромагнитного образца подается переменное напряжение синусоидальной формы, то синусоидально будет изменяться и магнитный поток (индукция), а форма кривой тока (поля) в общем случае является несинусоидальной и содержит высшие гармоники.

**Случай 2.** Пусть по намагничивающей обмотке проходит синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega t$  (из практики известно, что кривая тока становится близкой к синусоидальной тогда, когда велико активное сопротивление намагничивающей цепи, т. е.  $R \gg \omega L$ ). В этом случае магнитный поток и напряжение оказываются несинусоидальными. Чтобы убедиться в этом, снова воспользуемся графическим методом. Кривая магнитного потока  $\Phi(t)$  для этого случая может быть построена по кривой  $i(t)$  и петле гистерезиса  $\Phi(i)$ . На рис. 8.3 выполнено такое построение.

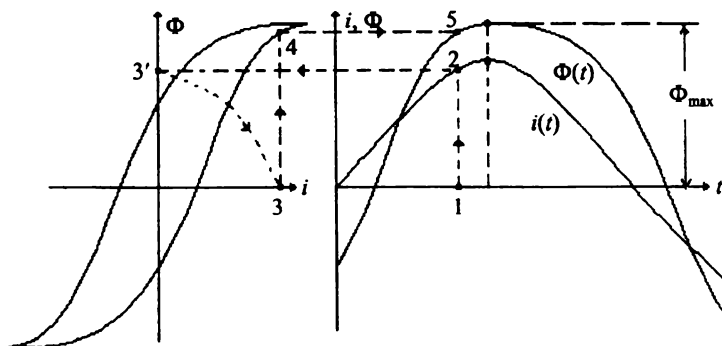


Рис. 8.3. Построение кривой магнитного потока по току и петле гистерезиса

Для произвольного момента времени (точка 1 на оси абсцисс) по кривой тока находим его мгновенное значение (точка 2). Найдя то же значение тока по петле (абсцисса 0—3 равна 0—3'), определяем соответствующее значение магнитного потока (точка 4). Откладывая это значение от точки 1 вверх, построим ординату 1—5 и получим точку 5 кривой магнитного потока. Проведя подобные операции для различных моментов времени, найдем кривую  $\Phi(t)$ .

Видно, что при синусоидальном токе в намагничивающей обмотке кривая магнитного потока является несинусоидальной и содержит, кроме основной, прежде всего 3-ю гармонику (а в общем случае и нечетные гармоники более высоких порядков).

Таким образом, при динамическом перемагничивании ферромагнетиков осуществляется либо режим синусоидального поля (тока), либо режим синусоидальной индукции. В средних магнитных полях или при высоких частотах, где форма петли гистерезиса близка к эллипсу, возможно осуществление режима, когда кривые тока и магнитного потока почти синусоидальны.

Из вышесказанного следует, что при определении динамических характеристик необходимо дополнительно указывать условия измерения, а именно: амплитудные значения индукции и поля ( $B_m$  и  $H_m$ ), частоту  $f$ , толщину образца, режим перемагничивания и, вообще говоря, метод измерения.

## **8.2. Динамическая кривая намагничивания и петля гистерезиса**

Кривые намагничивания и петли гистерезиса в переменном поле обычно измеряют при синусоидальном изменении магнитной индукции.

Изменение индукции в динамическом режиме за период перемагничивания происходит по динамическому циклу гистерезиса. Что же такое кривая намагничивания?

Динамическая кривая намагничивания представляет собой геометрическое место вершин динамических циклов гистерезиса,

характеризующее изменение амплитуды магнитной индукции в зависимости от амплитуды напряженности магнитного поля.

Форма динамического цикла изменяется по сравнению со статическим. Возникающие от вихревых токов потери энергии приводят к *уширению* динамического цикла. В зависимости от степени поверхностного эффекта может изменяться и форма гистерезисного цикла. В случае сильно развитого эффекта «носик» петли становится закругленным.

В случае заостренных циклов гистерезиса определение точек динамической кривой очевидно, в случае закругленных циклов точки  $B_m(H_m)$  определяются как наибольшие значения индукции и напряженности поля и не лежат на петле.

Отношение амплитудных значений индукции и поля определяет амплитудную проницаемость:

$$\mu = \frac{B_m}{H_m}. \quad (8.7)$$

В режиме синусоидальной индукции кривая напряженности поля и тока отличается от синусоиды. Что же указывать в качестве значения поля для динамических кривых?

### 8.2.1. Расчет значений поля и индукции

*Расчет напряженности намагничивающего поля* производят, исходя из следующих соображений:

1. Несинусоидальный ток заменяют эквивалентным синусоидальным  $i' = I_m \sin \omega t$  ( $H' = H_m \sin \omega t$ ), который имеет то же действующее значение, что и несинусоидальный.

2. Расчет действующего значения намагничивающего поля производят по измеренному действующему значению тока  $I$ , числу витков намагничивающей обмотки  $n_1$  и средней длине силовой магнитной линии  $l_{cp}$ :

$$H = \frac{n_1 I}{l_{cp}}, \text{ А/м}. \quad (8.8)$$

В замкнутой магнитной цепи, например, для образцов в виде кольца или тора,  $l_{cp} = \pi D_{cp}$ , где  $D_{cp}$  — средний диаметр. Также вводят понятие эффективной проницаемости

$$\mu_{\text{эф}} = \frac{B_m}{H\sqrt{2}}. \quad (8.9)$$

Динамическую кривую намагничивания строят в координатах  $B_m = f(H)$ , где  $H$  — действующее значение переменного магнитного поля, либо  $B_m = f(H_m)$ , где  $H_m = H\sqrt{2}$  — амплитудное значение эквивалентного синусоидального поля.

*Расчет амплитудного значения индукции* производят по измеренному среднему значению ЭДС во вторичной (измерительной) обмотке образца с числом витков  $n_2$ . Действительно, пусть магнитный поток изменяется синусоидально, тогда по известному закону синусоидальной, но сдвинутой по фазе на  $\pi/2$  будет и ЭДС во вторичной обмотке. Так как начальную фазу одной из синусоидально изменяющихся величин можно выбрать произвольно, то для удобства допустим, что магнитный поток имеет начальную фазу  $90^\circ$ :  $\Phi = \Phi_m \sin(\omega t + 90^\circ) = \Phi_m \cos \omega t$ , тогда наведенная ЭДС

$$e_2 = -n_2 \frac{d\Phi}{dt} = n_2 \omega \Phi_m \sin \omega t = E_m \sin \omega t, \quad (8.10)$$

где  $E_m = n_2 \omega \Phi_m = 2\pi f n_2 B_m S$  — амплитуда ЭДС.

Поскольку среднее за период значение синусоидально изменяющейся величины равно нулю, то приборы для измерения средних значений (рис. 8.4) работают по принципу двухполупериодного выпрямления и усреднения за полупериод:

$$\begin{aligned} E_{\text{ср}} &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} e_2 dt = \frac{2}{T} n_2 \omega B_m S \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = \\ &= -\frac{2}{T} n_2 \omega B_m S \frac{1}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^{T/2} = 4 f n_2 B_m S. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Откуда

$$B_m = \frac{E_{\text{ср}}}{4 f n_2 S}, \text{ Тл}, \quad (8.12)$$

где  $E_{\text{ср}}$  — среднее значение ЭДС, В;  $f$  — частота, Гц;  $S$  — площадь поперечного сечения образца,  $\text{м}^2$ .

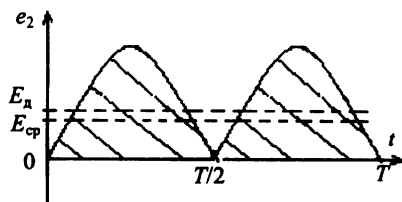


Рис. 8.4. К определению среднвы-  
прямленного значения

Отклонение формы кривой от синусоидальной принято ха-  
рактеризовать с помощью коэффициента формы кривой:

$$k_{\text{эф}} = \frac{E}{E_{\text{cp}}}, \quad (8.13)$$

где  $E$  — действующее значение напряжения. Так как для синусоиды из (8.10) и (8.11) имеем

$$E_{\text{cp}} = 4fn_2B_mS = 4\frac{\omega}{2\pi}n_2\Phi_m = \frac{2E_m}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}E}{\pi}. \quad (8.14)$$

Здесь учтено  $n_2\omega\Phi_m = E_m$  и  $E_m = \sqrt{2}E$ . Тогда для синусоидально  
изменяющихся величин

$$k_{\text{ф}} = \frac{E}{E_{\text{cp}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11. \quad (8.15)$$

Если периодически изменяющаяся величина имеет кривую более  
острой формы, чем синусоида, то  $k_{\text{ф}} > 1,11$ , если более пологую,  
то  $k_{\text{ф}} < 1,11$ . Применяя  $k_{\text{ф}}$ , можно действующее значение ЭДС —  
 $E$ , также как и  $E_{\text{cp}}$ , выразить через максимальное значение маг-  
нитного потока

$$E = k_{\text{ф}}E_{\text{cp}} = 4k_{\text{ф}}fn_2\Phi_m. \quad (8.16)$$

Для синусоидальной формы кривой магнитного потока из (8.16)  
следует

$$E = 4,44fn_2\Phi_m \quad (8.17)$$

$$B_m = \frac{E}{4,44fn_2S}, \text{ Тл.} \quad (8.18)$$



### 8.2.2. Применение феррометров для определения динамических магнитных характеристик

Для целей магнитных измерений в переменных магнитных полях широко используются феррометры, в основе работы которых лежит фазочувствительный преобразователь. Феррометрический метод является разновидностью индукционного метода измерений.

Этот метод обеспечивает измерение динамических кривых намагничивания, а также петель гистерезиса и основан на способности фазочувствительного преобразователя измерять мгновенные значения электрического сигнала путем измерения среднего значения от него за часть периода.

Фазочувствительные преобразователи с полупериодной отсечкой определяют средневыврявленное значение измеряемого сигнала за половину периода, которое оказывается равным мгновенному значению сигнала на момент начала отсечки. По средним за полупериод значениям индуктируемой в измерительных обмотках ЭДС возможно измерение мгновенных значений магнитного поля и индукции в образце.

Рассмотрим связь между мгновенными значениями магнитных величин и средними величинами индуктируемого ими сигнала.

А. Пусть магнитный поток представляет собой несинусоидальную периодическую функцию

$$\Phi(t) = \sum \Phi_{mk} \cos(k\omega t + \alpha_k), \quad (8.19)$$

где  $\Phi_{mk}$ ,  $k\omega t + \alpha_k$  — амплитуда и фаза  $k$ -гармоники магнитного потока соответственно. Пусть также эта функция является нечетной, т. е.

$$\Phi(t) = -\Phi(t + T/2), \quad (8.20)$$

где  $T$  — период функции.

Так как ЭДС в измерительной обмотке  $n_2$  пропорциональна производной от магнитного потока  $e_2 = -n_2\Phi'$ , то среднее значение ЭДС за полупериод

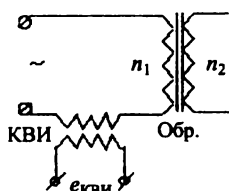
$$E_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} e_2 dt = -\frac{2}{T} n_2 \int_0^{T/2} \Phi' dt = -\frac{2}{T} n_2 \Phi(t) \Big|_0^{T/2} = 4 f n_2 S B(t). \quad (8.21)$$

Окончательно в результате учтена нечетность функции  $\Phi(t)$ . Заметим, что полученный результат  $E_{\text{ср}} \sim B(t)$  отличается от полученного ранее, когда  $E_{\text{ср}} \sim B_m$ . Это связано с пределами интегрирования: здесь от любого момента времени, а ранее — от 0.

Таким образом, мгновенное значение индукции в образце пропорционально среднему за полупериод значению ЭДС в измерительной обмотке:

$$B(t) = \frac{E_{\text{ср}}}{4fn_2S}, \text{ Тл.} \quad (8.22)$$

**Б.** Значение напряженности магнитного поля (намагничивающего тока) может быть определено катушкой поля либо катушкой взаимной индуктивности (КВИ), включенной первичной обмоткой в цепь намагничивания. При этом для катушки поля рассмотрение полностью аналогично приведенному выше.



В случае КВИ (см. рисунок) имеем для ЭДС в ее вторичной обмотке:

$$e_{\text{КВИ}}(t) = -Mi'(t), \quad (8.23)$$

где  $M$  — коэффициент взаимной индуктивности катушки;  $i$  — мгновенное значение тока в первичной обмотке. Тогда при условии

периодичности и нечетности сигнала тока имеем

$$E_{\text{ср.КВИ}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} e_{2\text{КВИ}} dt = -\frac{2}{T} M \int_0^{T/2} i' dt = -\frac{2}{T} Mi(t) \Big|_0^{T/2} = 4fMi(t). \quad (8.24)$$

Из уравнения (8.24) видно, что среднее значение ЭДС во вторичной обмотке КВИ, включенной в намагничивающую цепь образца, пропорционально мгновенному значению тока или поля. Ток и поле связаны соотношением  $H(t) = n_1 i(t)/l_{\text{ср}}$ . Тогда

$$H(t) = \frac{n_1 E_{\text{ср.КВИ}}}{4fMl_{\text{ср}}}, \text{ А/м.} \quad (8.25)$$

Таким образом, в феррометрическом методе определение основных динамических магнитных характеристик — кривой намагничивания и петли гистерезиса — заключается в определении

мгновенных значений магнитной индукции  $B(t)$  и напряженности магнитного поля  $H(t)$  в один и тот же момент времени. Изменяя амплитуду  $B_m$  и  $H_m$ , можно получить динамическую кривую намагничивания, а изменяя время начала интегрирования  $t$  при заданном значении  $H_m$  (или  $B_m$ ) — петлю гистерезиса.

Для реализации данного метода необходимы следующие условия:

1. Нечетность и периодичность измеряемых функций; это условие выполняется для  $B(t)$  и  $H(t)$  при отсутствии постоянного подмагничивающего поля.

2. Получение производных от измеряемых функций. Это условие выполняется во вторичных обмотках образца и КВИ, а также в катушке поля автоматически, так как они играют роль дифференциатора сигналов.

3. Установление момента отсчета мгновенного значения измеряемых функций. Это условие выполняется с помощью коммутатора, периодически замыкающего измерительную цепь в моменты  $t + kT$  и размыкающего ее в моменты  $t + T/2 + kT$ , изменение момента начала отсчета достигается средствами управления коммутатором.

4. Интегрирование измеряемого сигнала в течение времени измерения, осуществляемое с помощью интегрирующего устройства.

Реализация условий 3 и 4 осуществляется в едином устройстве, называемом фазочувствительным преобразователем, который с помощью аналогового ключа пропускает входное напряжение с дифференциатора на интегратор. Замыкание ключа происходит под действием управляющего напряжения прямоугольной формы, фаза которого по отношению к измеряемому сигналу (т. е. началу измерения) регулируется. Выходной сигнал с фазочувствительного преобразователя будет зависеть от сдвига фаз между  $u_{упр}$  и  $u_{вх}$  (рис. 8.5).

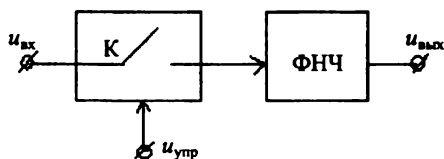


Рис. 8.5. Блок-схема фазочувствительного преобразователя

В этом случае среднее значение измеряемого сигнала пропорционально заштрихованной площади с учетом знака. При совпадении фаз входного и управляющего напряжений (рис. 8.6 а) показания прибора максимальны, а при сдвиге фаз  $90^\circ$  (рис. 8.6 в), равны нулю.

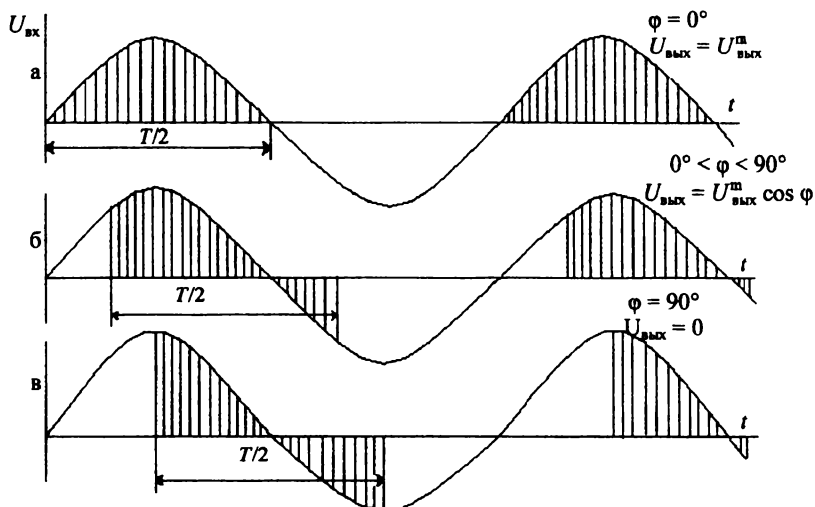


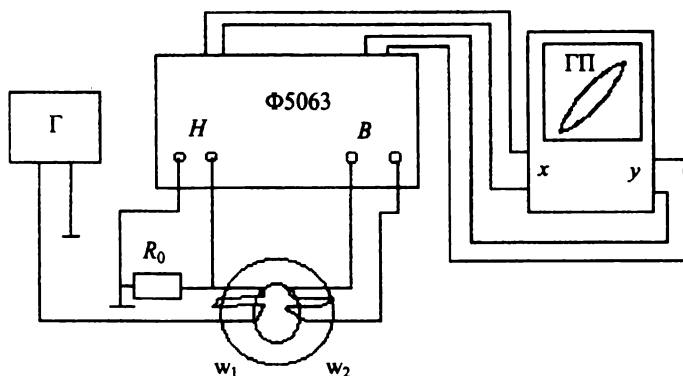
Рис. 8.6. Диаграммы, иллюстрирующие работу феррометра

### Характеристика феррометра Ф5063 и установки на его основе

Двухканальный электронный феррометр Ф5063 с цифровым отсчетом предназначен для измерения средних значений напряжения при синусоидальной и искаженной формах сигналов в диапазоне 25 Гц — 10 кГц и мгновенных значений тока на частотах 50—1000 Гц. Феррометр имеет два измерительных канала. Канал измерения напряженности магнитного поля оборудован двумя входами — потенциальным « $U_H$ » и токовым « $I_H$ ». Вход « $U_H$ » предназначен для напряжения, снимаемого с индукционного первичного преобразователя, например, с КВИ. Это напряжение пропорционально производной от напряженности поля. Вход « $I_H$ » предназначен для напряжения, пропорционального значению намагничивающего тока, снимаемого, например, с образцового резистора

в намагничивающей цепи. Канал измерения магнитной индукции имеет вход « $U_B$ » для ввода ЭДС с измерительной катушки образца, значение этой ЭДС пропорционально производной магнитной индукции.

Схема установки на базе феррометра для измерения динамических параметров магнитных материалов приведена на следующем рисунке.



В качестве источника намагничивающего тока может быть использован генератор сигналов звуковой частоты требуемой мощности. Требования к намагничивающей и измерительной обмоткам образца определяются сечением образца и необходимой величиной тока. Подключение графопостроителя осуществляется к аналоговым выходам каналов « $B$ » и « $H$ » феррометра. С помощью феррометра определяются следующие характеристики: мгновенные и амплитудные значения магнитной индукции и напряженности магнитного поля, кривая намагничивания и динамическая петля гистерезиса, в автоматическом режиме — динамические остаточная индукция и коэрцитивная сила. Регистрация измеренных параметров возможна либо с помощью цифropечатающего устройства, либо с помощью двухкоординатного графопостроителя. При записи петли, кроме информации о ее форме, возможно определение площади петли, т. е. магнитных потерь.

### 8.3. Потери энергии на перемангничивание

Динамическое перемангничивание магнитных материалов сопровождается выделением в объеме образца теплоты, которая рассеивается в окружающую среду. Этот процесс энергетически

обеспечивается за счет источника тока. За каждый цикл перемагничивания в образце выделяется энергия

$$W = V \oint H dB = V S_n, \quad (8.26)$$

пропорциональная площади динамической петли гистерезиса.

Потери энергии на перемагничивание ферромагнитного материала — магнитные потери — характеризуются мощностью удельных потерь, т. е. потерями за единицу времени, отнесенными к единице массы. Тогда магнитные потери при перемагничивании с частотой  $f$  составят

$$P = \frac{W}{T m} = \frac{V}{T m} S_n = \frac{S_n}{\gamma} f, \text{ Вт/кг}, \quad (8.27)$$

где  $V$  — объем образца,  $\text{м}^3$ ;  $m$  — масса образца, кг;  $\gamma = m/V$  — плотность материала,  $\text{кг/м}^3$ ;  $S_n$  — площадь динамической петли,  $\text{Тл} \cdot \text{А/м}$ .

По современным представлениям магнитные потери (мощность удельных потерь энергии на перемагничивание) делятся на гистерезисные потери, потери от вихревых токов и дополнительные потери:

$$P = P_r + P_{\text{ов}} + P_d. \quad (8.28)$$

**Магнитные потери на гистерезис.** Такое деление предполагает, что причины, приводящие к статическим потерям на гистерезис, имеют место и в динамическом режиме перемагничивания. Естественно, мощность гистерезисных потерь в этом случае становится пропорциональной количеству циклов перемагничивания за единицу времени:

$$P_r = \frac{s}{\gamma} f, \text{ Вт/кг}, \quad (8.29)$$

где  $s$  — площадь статического цикла гистерезиса,  $\text{Тл} \cdot \text{А/м}$ .

**Магнитные потери на вихревые токи.** При динамическом перемагничивании в материале за счет изменения магнитной индукции возбуждаются вихревые токи, энергия которых при ненулевом электросопротивлении также превращается в тепло и дает вклад в магнитные потери. Мощность потерь от вихревых токов

довольно просто рассчитывается при условии равномерного изменения магнитной индукции и параллельности вектора индукции вектору поля. Такой расчет для материала в виде листа приводит к формуле

$$P_{\text{ов}} = \frac{4B_m^2 f^2 d^2 k_\Phi^2}{3\gamma\rho}, \text{ Вт/кг}, \quad (8.30)$$

где  $B_m$  — амплитуда магнитной индукции, Тл;  $d$  — толщина листа, м;  $\rho$  — удельное электросопротивление, Ом·м;  $\gamma$  — плотность материала, кг/м<sup>3</sup>.

Данный расчет не учитывает существенного обстоятельства — доменной структуры материала, из-за которой изменение индукции сугубо неоднородно по сечению листа. Учет доменной структуры в модели плоскопараллельных доменов шириной  $L$  приводит к выражению

$$P_{\text{вт}} = 1,63 \frac{L}{d} P_{\text{ов}}. \quad (8.31)$$

**Дополнительные магнитные потери.** Однако даже в этом случае измеренные потери оказываются больше, чем сумма  $P_{\text{вт}}$  и  $P_r$ , оставшуюся часть и называют дополнительными потерями. Очевидно, что эта часть может быть обусловлена либо особенностями доменной структуры, так как плоскопараллельная структура реализуется далеко не всегда, либо особенностями динамического поведения доменных границ. Следует заметить, что эта часть потерь в зависимости от материала и условий перемагничивания может иметь и невихретоковую природу. Например, на низких частотах возможны также потери на магнитную вязкость, обусловленные диффузией атомов примесей в доменную стенку, при высоких частотах — потери, обусловленные спин-спиновой релаксацией.

### 8.3.1. Измерение магнитных потерь электрическими методами

Измерение магнитных потерь может быть осуществлено путем измерения активной мощности, отбираемой от источника намагничивающего тока, или путем измерения тепловой мощности, излучаемой телом в окружающую среду.

Наиболее распространены методы измерения электрической мощности, рассеиваемой в образце.

Известно, что катушка с сердечником из магнитно-мягкого материала представляет собой преимущественно индуктивное сопротивление для переменного тока.

А. В случае цепи с *чисто индуктивной нагрузкой* происходит только периодический обмен энергией между генератором и магнитным полем катушки без необратимого преобразования электрической энергии, например, в тепловую. Действительно, мгновенная мощность

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \sin(\omega t + \pi/2) I_m \sin \omega t = \\ &= (1/2) U_m I_m \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t, \end{aligned} \quad (8.32)$$

где  $u$  и  $i$  — мгновенные значения в намагничивающей обмотке, а  $U$  и  $I$  — действующие значения напряжения и тока в ней;  $\omega$  — частота тока. Видно (рис. 8.7), что мгновенная мощность изменяется с двойной частотой, два раза в течение периода достигая максимума и два раза достигая такого же по величине минимума.

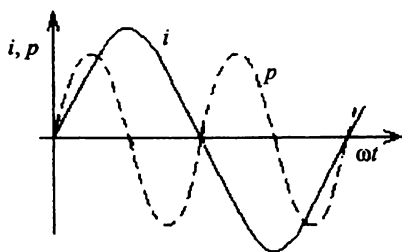


Рис. 8.7. Зависимость мгновенных значений тока и мощности в намагничивающей обмотке от времени

Таким образом, средняя за период мощность, потребляемая цепью, оказывается равной нулю, поскольку в течение первой и третьей четвертей периода цепь работает в режиме потребителя, запасая энергию в виде энергии магнитного поля катушки, а в течение второй и четвертой четвертей — в режиме генератора, возвращая обратно запасенную ей энергию.



Б. При наличии гистерезиса магнитного сердечника часть энергии генератора расходуется необратимо и рассеивается в виде тепла. Эта ситуация аналогична присутствию в цепи активного сопротивления (когда выделяется мощность  $P = UI$ ,  $U$  и  $I$  — действующие значения тока и напряжения) с той разницей, что присутствие индуктивного сопротивления вызывает сдвиг фаз между током и напряжением, отличный от  $\pi/2$ . Тогда мгновенная мощность

$$p = ui = U_m \sin(\omega t + \varphi) I_m \sin \omega t = 0,5 U_m I_m \cos \varphi - \\ - 0,5 U_m I_m \cos(2\omega t + \varphi) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi). \quad (8.33)$$

Среднее за период значение переменной слагающей мощности (как гармонической функции) равно нулю. Тогда средняя за период, или активная, мощность равна

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T (UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)) dt = \\ = \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos \varphi dt = UI \cos \varphi. \quad (8.34)$$

Итак, в этом случае мощность, потребляемая цепью, расходуется на перемагничивание сердечника и равна произведению действующих значений напряжения, тока и  $\cos \varphi$ , который называют коэффициентом мощности.

При неизменных значениях тока и напряжения мощность в цепи в зависимости от  $\cos \varphi$  может изменяться от нуля при  $\varphi = \pi/2$  до наибольшего значения при  $\varphi = 0$ . Значение  $\cos \varphi$  определяется магнитными свойствами образца.

В общем случае задача измерения потерь сводится к измерению среднего за период значения интеграла от произведения мгновенных значений тока и напряжения в цепи намагничивания.

С учетом потерь энергии на активном сопротивлении намагничивающей обмотки выражение для потребляемой мощности имеет вид

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u_1 i_1 dt + I^2 r. \quad (8.35)$$

С потерями энергии в магнитном материале связан только первый член в (8.34). В режиме синусоидальной индукции ( $R \ll \omega L$ ) выполняется равенство напряжения в первичной обмотке, и ЭДС самоиндукции в ней  $u_1 = e_1$ . Если учесть известную связь между ЭДС в первичной и вторичной обмотках на холостом ходу трансформатора  $e_1/e_2 = n_1/n_2$ , то для удельных магнитных потерь получим

$$P_{уд} = \frac{1}{m} \frac{n_1}{n_2} \frac{1}{T} \int_0^T i_1 e_2 dt. \quad (8.36)$$

Таким образом, измерительный прибор должен осуществлять операции перемножения и усреднения (интегрирования) во всем диапазоне частот входных сигналов.

Соотношения (8.34) и (8.36) лежат в основе электрических методов измерения мощности магнитных потерь. Такие приборы называются ваттметрами, но принципы реализации указанных операций в них могут быть различными.

Электрические методы измерения мощности, поглощаемой в нагрузке, уже были рассмотрены в гл. 5. Эти методы (кроме метода амперметра — вольтметра) реализуют перемножение и усреднение сигналов с обмоток и используются для измерения магнитных потерь. Наряду с применением электродинамического преобразователя, преобразователей на квадратирующих элементах и модуляционного преобразователя для измерения удельной мощности потерь энергии на перемангничивание образцов малой массы используют ваттметровый метод, который может быть реализован на установке с электростатическим микроваттметром.

В основе *электростатического ваттметра* лежит электростатический измерительный механизм — квадрантный электрометр, который содержит кратное четырем число неподвижных электродов — квадрантов (1—4) и подвижный электрод 5 (рис. 8.8). Накрест лежащие пары электродов 1, 3 и 2, 4 соответственно электрически соединены. Пара электродов 2, 4 соединена с корпусом.

Принцип действия квадрантных электрометров основан на использовании изменения энергии электрического поля нескольких заряженных тел.

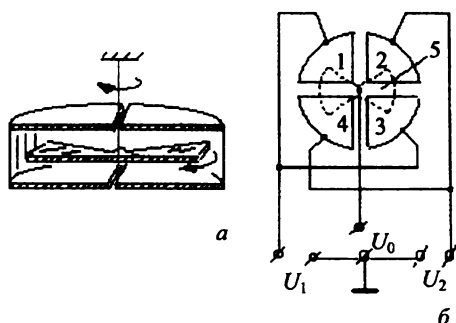


Рис. 8.8. Устройство (а) и схема соединения квадрантов (б) электростатического измерительного механизма

Электрометры представляют собой конденсатор емкостью  $C$ , в котором часть электродов подвижна. При условии углового перемещения электродов напряжения  $U_0$  (5 ÷ корпус),  $U_1$  (1, 3 ÷ корпус) и  $U_2$  (2, 4 ÷ корпус), приложенные к подвижному электроду и квадрантам, ведут к возникновению пары противоположно направленных сил, создающих вращающий момент  $M$  ( $M \sim dW_c/d\alpha$ ):

$$M = \frac{1}{2} \frac{dC}{d\alpha} [(U_2 - U_0)^2 - (U_1 - U_0)^2]. \quad (8.37)$$

В приборах на растяжках противодействующий момент растяжек пропорционален углу отклонения  $\alpha$  подвижного электрода  $M_{\text{прот}} = D\alpha$ , тогда из условия равновесия подвижной системы отклонение указателя (стрелки)

$$\alpha = \frac{1}{2D} \frac{dC}{d\alpha} [(U_2 - U_0)^2 - (U_1 - U_0)^2]. \quad (8.38)$$

При измерении мощности в нагрузке  $Z_n$  с помощью электрометра (рис. 8.9) к квадрантам 1 приложено напряжение  $U_i$ , пропорциональное току нагрузки, протекающему по шунту, а к «бисквиту» 3 — напряжение  $U_n$ .

При этом напряжения в выражении (8.38) составляют  $U_0 = U_n + U_i$ ,  $U_1 = U_i = IR_{\text{ш}}$ ,  $U_2 = 0$ , откуда

$$\alpha = \frac{1}{D} \frac{dC}{d\alpha} \left[ U_n U_i + \frac{U_i^2}{2} \right] = \frac{R_{ш}}{D} \frac{dC}{d\alpha} (P_n + 0,5P_{ш}), \quad (8.39)$$

где  $P_n$  и  $P_{ш}$  — мощности, рассеиваемые в нагрузке и в шунте.

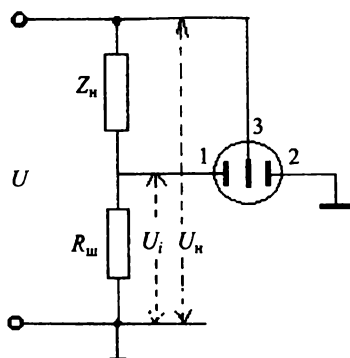


Рис. 8.9. Схема подключения нагрузки при измерении мощности

Таким образом, электростатические приборы могут использоваться для измерения электрической мощности и, следовательно, магнитных потерь.

### 8.3.2. Измерение магнитных потерь тепловыми методами

Поступление мощности в нагрузку расходуется на перемагничивание сердечника и сопровождается выделением в нем теплоты. Разумеется, выделившаяся теплота равна затраченной энергии  $\Theta = W$  и поглощается сердечником:

$$C\Delta T = P\Delta t, \quad (8.40)$$

где  $W = P\Delta t$  — затраченная энергия за время протекания тока в нагрузке,  $\Theta = C\Delta T$  — поглощенная сердечником теплота при изменении его температуры на  $\Delta T$ ,  $\Delta t$  — время перемагничивания,  $C$  — теплоемкость тела сердечника.

Соотношение (8.40) лежит в основе тепловых (калориметрических) косвенных методов измерения мощности магнитных

потерь. В соответствии с этой формулой измерение мощности можно производить путем определения приращения температуры  $\Delta T$  рабочего тела нагрузки за выбранное время  $\Delta t$ :

$$P = C(\Delta T/\Delta t). \quad (8.41)$$

Реализация калориметрического метода и методика градуировки калориметра не отличаются от представленных в 5.3.1.

В настоящее время наиболее перспективно проведение измерений магнитных потерь с использованием персональных компьютеров. При этом сигналы тока в первичной обмотке и ЭДС во вторичной кодируются с помощью аналого-цифровых преобразователей, а затем компьютер рассчитывает потери прямо по формулам (8.34)—(8.36). Точность получаемого результата зависит от соотношения частоты перемагничивания и частоты дискретизации сигналов, причем последняя должна существенно превышать частоту перемагничивания.

## Список рекомендуемой литературы

### *Общие вопросы и электрические измерения*

#### **Основная**

Метрология, стандартизация и сертификация : учебник для студ. высш. учеб. заведений / Б. Я. Авдеев и др. ; под ред. В. В. Алексеева. М. : Изд. центр «Академия», 2007.

Раннев Г. Г. Методы и средства измерений / Г. Г. Раннев, А. П. Тарасенко. М. : Академия, 2004.

Метрология, стандартизация, сертификация и электроизмерительная техника : учеб. пособие / К. К. Ким и др. ; под ред. К. К. Кима. СПб. : Питер, 2006.

Основы метрологии и электрические измерения / под ред. Е. М. Душина. Л. : Энергоатомиздат, 1987.

Электрические измерения / под ред. В. Н. Малиновского. М. : Энергоиздат, 1983.

Электрические измерения неэлектрических величин / под ред. П. В. Новицкого. Л. : Энергия, 1975.

Электрические измерения : учеб. пособие для вузов / под ред. Е. Г. Шрамкова. М. : Высш. шк., 1972.

Камке Д. Физические основы единиц измерения / Д. Камке, К. Кремер ; пер. с нем. М. : Мир, 1980.

РМГ 29-99. Метрология. Основные термины и определения. Минск : Изд-во стандартов, 2000.

ГОСТ 8.417-2002. Единицы величин. Минск : Изд-во стандартов, 2002.

ГОСТ 8.207-76. Методика обработки измерения с многократными наблюдениями. М. : Изд-во стандартов, 1976.

ГОСТ 8.009-84. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений. М. : Изд-во стандартов, 1988.

#### **Дополнительная**

Измерения, контроль, испытания и диагностика // Машиностроение : энцикл. / под ред. В. В. Клюева. М. : Машиностроение, 2001. Т. 3—7.

Любимов Л. И. Проверка средств электрических измерений : справ. кн. / Л. И. Любимов, И. Д. Форсилова, Е. З. Шапиро. Л. : Энергоатомиздат, 1987.

Безкоровайный П. М. Электрические измерения : учеб. пособие / П. М. Безкоровайный. М. : ВИСМ., 1983.

Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок / Дж. Тейлор ; пер. с англ. М. : Мир, 1985.

Кухлинг Х. Справочник по физике / Х. Кухлинг ; пер. с нем. М. : Мир, 1982.

Яковлев Г. П. Краткие сведения по обработке результатов физических измерений : метод. указания / Г. П. Яковлев. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2006.

## *Магнитные измерения*

### **Основная**

*Боровик Е. С.* Лекции по магнетизму / Е. С. Боровик, В. В. Еременко, А. С. Мильнер. М. : Физматлит, 2005.

*Тикадзуми С.* Физика ферромагнетизма. Магнитные характеристики и практические применения / С. Тикадзуми ; пер. с яп. М. : Мир, 1987.

*Ивановский В. И.* Физика магнитных явлений. Семинары / В. И. Ивановский, Л. А. Черникова ; под ред. проф. Е. И. Кондорского. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1981.

*Антонов В. Г.* Средства измерений магнитных параметров материалов / В. Г. Антонов, Л. М. Петров, А. П. Щелкин. Л. : Энергоатомиздат, 1986.

*Испытание магнитных материалов и систем* / Е. В. Комаров и др. М. : Энергоатомиздат, 1984.

*Средства измерений параметров магнитного поля* / Ю. В. Афанасьев и др. Л. : Энергия, 1979.

*Чечерников В. И.* Магнитные измерения / В. И. Чечерников. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1969.

*Кифер И. И.* Испытания ферромагнитных материалов / И. И. Кифер. М. : Энергия, 1969.

### **Дополнительная**

*Гольцман Г. Н.* Эффекты Джозефсона в сверхпроводниках / Г. Н. Гольцман // Сорос. образов. журн. 2000. Т. 6, № 4. С. 92—106.

*Гайдуков Ю. П.* Физические основы и методы получения магнитного поля / Ю. П. Гайдуков // Сорос. образов. журн. 1996. № 4. С. 97—105.

*Монтгомери Д.* Получение сильных магнитных полей с помощью соленоидов : пер. с англ. / Д. Монтгомери. М. : Мир, 1971.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
Глава 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОЦЕССА ИЗМЕРЕНИЙ .....	5
1.1. Виды и методы измерений .....	5
1.2. Физические величины и единицы измерения .....	7
1.3. О погрешностях измерения .....	10
1.3.1. Основные понятия .....	10
1.3.2. Оценка погрешностей прямых измерений .....	12
1.3.3. Оценка погрешностей косвенных измерений .....	19
Глава 2. СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЙ .....	21
2.1. Средства измерений .....	21
2.2. Классификация измерительных приборов .....	23
Глава 3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ .....	25
3.1. Статические характеристики и параметры СИ .....	25
3.1.1. Уравнение преобразования .....	25
3.1.2. Чувствительность СИ .....	26
3.1.3. Погрешность СИ, пределы измерений, полный диапазон .....	29
3.1.4. Входное и выходное сопротивление, мощность, быстродействие, надежность .....	33
3.2. Динамические характеристики и параметры СИ .....	34
3.2.1. Свойства дифференцирующего преобразователя .....	36
3.2.2. Свойства реального дифференцирующего преобразователя .....	40
3.2.3. Свойства интегрирующего преобразователя .....	46
3.2.4. Свойства реального интегрирующего преобразователя .....	49
3.2.5. Свойства колебательного преобразователя .....	53
Глава 4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ: КОНСТРУКЦИИ И ПРИНЦИПЫ РАБОТЫ .....	64
4.1. Электромеханические преобразователи .....	64
4.1.1. Электродинамический измерительный механизм .....	66
4.1.2. Магнитоэлектрический измерительный механизм .....	69
4.1.3. Электромагнитный измерительный механизм .....	71
4.1.4. Электростатический измерительный механизм .....	72
4.2. Электрические масштабные преобразователи .....	74
4.2.1. Добавочные резисторы .....	74
4.2.2. Шунты .....	76
4.2.3. Делители напряжения .....	77
4.2.4. Измерительные усилители .....	80
4.2.5. Измерительные трансформаторы переменного тока и напряжения .....	81



4.3. Измерительные преобразователи рода тока .....	87
4.3.1. Термозлектрические преобразователи .....	87
4.3.2. Измерительные выпрямители .....	89
Глава 5. ИЗМЕРЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН .....	95
5.1. Измерение токов и напряжений .....	95
5.1.1. Источники погрешностей, возникающих при измерении токов и напряжений .....	96
5.1.2. Измерение постоянных токов и напряжений .....	100
5.1.3. Измерение переменных токов и напряжений .....	104
5.2. Измерение сопротивления, индуктивности, емкости, добротности и угла потерь .....	109
5.2.1. Мосты постоянного тока .....	109
5.2.2. Уравновешенные мосты переменного тока .....	111
5.3. Измерение электрической мощности .....	117
5.3.1. Метод калориметра .....	119
5.3.2. Метод амперметра — вольтметра .....	121
5.3.3. Электродинамический ваттметр .....	121
5.3.4. Ваттметр на квадратирующих элементах .....	124
5.3.5. Модуляционный ваттметр .....	126
5.3.6. Измерение энергии в электрической цепи .....	127
Глава 6. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ .....	130
6.1. Квантование, дискретизация и кодирование сигналов .....	130
6.2. Системы счисления и коды .....	133
6.3. Принципы построения АЦП .....	135
6.4. Информационно-измерительные системы и комплексы .....	145
Глава 7. ИЗМЕРЕНИЕ МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН .....	149
7.1. Магнитные характеристики вещества и поля .....	149
7.1.1. Магнитное поле и магнитная индукция .....	150
7.1.2. Единицы измерения индукции и напряженности магнитного поля .....	151
7.1.3. Магнитные параметры намагничиваемых сред .....	154
7.1.4. Другие магнитные характеристики сильномагнитных ве- ществ и материалов .....	156
7.1.5. Условия проведения измерений .....	158
7.2. Магнитные цепи, образцы, устройства намагничивания .....	159
7.2.1. Общие положения теории магнитных цепей .....	159
7.2.2. Образцы и анализ магнитных цепей .....	162
7.2.2.1. Замкнутая магнитная цепь .....	162
7.2.2.2. Частично замкнутая магнитная цепь .....	165
7.2.2.3. Разомкнутая магнитная цепь, размагничивающее поле ....	169
7.2.3. Намагничивающие устройства .....	173
7.2.3.1. Катушки Гельмгольца .....	174

7.2.3.2. Соленоид .....	175
7.2.3.3. Электромагнит .....	180
7.3. Методы и приборы для измерения магнитной индукции .....	182
7.3.1. Баллистический гальванометр .....	184
7.3.2. Веберметр (флюксметр) .....	190
7.3.3. Методы аналогового и цифрового интегрирования сигнала ЭДС .....	194
7.3.4. Методики измерений в постоянном магнитном поле .....	197
7.4. Измерение намагниченности .....	200
7.4.1. Определение намагниченности по измерению ЭДС .....	201
7.4.2. Определение намагниченности по измерению силы .....	202
7.4.3. Определение намагниченности по измерению поля рассеяния .....	205
7.5. Методы измерения напряженности магнитного поля .....	213
7.5.1. Физические основы измерения напряженности внутреннего магнитного поля .....	214
7.5.2. Плоские накладные катушки — катушки поля .....	217
7.5.3. Магнитный потенциалметр .....	218
7.5.4. Феррозонд .....	220
7.5.5. Датчик на основе эффекта Холла .....	223
7.6. Квантовые преобразователи и преобразователи на основе сверхпроводимости .....	225
7.6.1. Ядерные преобразователи .....	225
7.6.2. Преобразователи электронного парамагнитного резонанса .....	230
7.6.3. Преобразователи на основе явления сверхпроводимости .....	231
<b>Глава 8. ИЗМЕРЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МАГНИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ .....</b>	<b>237</b>
8.1. Условия измерения .....	237
8.2. Динамическая кривая намагничивания и петля гистерезиса .....	241
8.2.1. Расчет значений поля и индукции .....	242
8.2.2. Применение феррометров для определения динамических магнитных характеристик .....	245
8.3. Потери энергии на перемагничивание .....	249
8.3.1. Измерение магнитных потерь электрическими методами .....	251
8.3.2. Измерение магнитных потерь тепловыми методами .....	256
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>258</b>

*Учебное издание*

**Катаев Василий Анатольевич**

**МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ СВОЙСТВ  
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

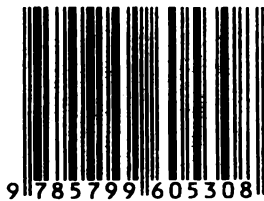
**Учебное пособие**

**Редактор и корректор В. И. Попова  
Компьютерная верстка Н. П. Сорокиной**

План выпуска 2010 г., поз. 5. Подписано в печать 02.07.2010.  
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman.  
Уч.-изд. л. 13,6. Усл. печ. л. 15,3.  
Тираж 120 экз. Заказ *116* .

Издательство Уральского университета.  
620000, Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

Отпечатано в ИПЦ «Издательство УрГУ».  
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.



9 785799 605308